ЛЕКЦИЯ 1

ТЕМА: Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования.

Вопросы темы: Понятие первообразной функции. Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Методы интегрирования.Метод непосредственного интегрованиия. Метод подстановки. Метод интегрирования по частям.

Понятие первообразной функции.

Зная закон движения тела, можно, продифференцировав функцию перемещения тела по времени, в любой момент найти его скорость. Часто требуется решить обратную задачу, то есть найти перемещение тела, зная, как изменяется его скорость. Или такую задачу как определение численности популяции организмов во времени зная скорость роста численности. Подобные задачи решаются при помощи интегрирования – операции, обратной дифференцированию.

Определение: Функция F(x) называется первообр**азной функцией** функции *f(x)* на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

F′(x) = f(x).

Пример.

$F(x)=\sin x$ – первообразная для функции $f(x)=\cos x$ при $x\in(-\infty,+\infty)$, так как $(\sin x)'=\cos x$ при любых $x\in(-\infty,+\infty)$.

$F(x)=\arcsin x$ – первообразная для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $x\in(-1,1)$, так как $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при любых x из указанного промежутка.

Первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$F_1(x) = F_2(x) + C.$

Теорема 1. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C – любое число, также первообразная для функции $f(x)$.

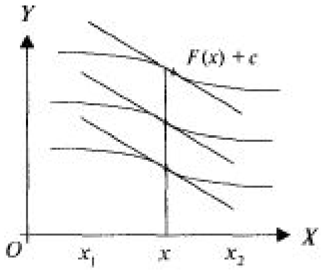
Доказательство. Так как $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$. Так как $(F(x)+C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$, то согласно определению $F(x)+C$ – первообразная для функции $f(x)$.

Неопределенный интеграл.

Интегрированием называется действие обратное дифференцированию. Или восстановление функции *F(x)* по ее производной *f(x)*. Латинское слово “integro” означает – восстановление.

Определение: Неопределенным интегралом функции *f(x)* называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:
F(x) + C.
Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.
Геометрический смысл н.и. следует из геометрического смысла производной: уравнение *y=F(x) +c* на плоскости *XOY* определяет семейство кривых (называемых интегральными кривыми), для которых в точке с абсциссой x угловой коэффициент касательных равен $f(x)$)
Физический смысл н.и.: $\int v(t)\,dt = s(t) + c$, т.е. н.и. от скорости неравномерного прямолинейного движения дает зависимость пути от времени.



Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$

где u, v, w – некоторые функции от x.

1. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

<u>Пример:</u> $\int (x^2-2\sin x+1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C.$
2. $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \mu \neq -1.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a>0,\ a\neq 1$,

в частности $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin xdx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos xdx = \sin x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1.$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C_1.$

C, C_1 – произвольные постоянные.

Методы интегрирования.

Есть три основных метода интегрирования.

Метод непосредственного интегрированиия.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Пример:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

В отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Метод подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dt$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x (x^2 + 1)^{3/2} dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2x dx; \quad dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Метод интегрирования по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$(uv)' = u'v + v'u$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x}\cos x dx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось привести к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| +$$

$$+ \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2} x\cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример.

$$\int x^2 e^{5x} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x} dx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix} \right\} = \frac{1}{5} e^{5x} x^2 - \int \frac{1}{5} e^{5x} 2xdx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \int xe^{5x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x} dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5} e^{5x}; \end{matrix} \right\} = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \right] = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25} \int e^{5x} dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5} \left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25} \right).$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 9}} = \{ dx = d(x+1) \} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \{ x + 1 = t \} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x+1}{3} + C.$$