ЛЕКЦИЯ 4.

ТЕМА: Дифференциальные уравнения

Вопросы темы. Понятие дифференциального уравнения. Решение дифференциального уравнения. Интегральная кривая. Общее и частное решение. Задача Коши для уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения второго порядка допускающие его понижение.

Дифференциальные уравнения

Определение Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные различных порядков по x.

Общий вид дифференциального уравнения п-го порядка:

$$F(x, y, y',...,y^{(n)}) = 0$$

Порядок дифференциального уравнения

Определение Порядок старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения.

Примеры.

Первый порядок $y' = xy$

Второй порядок $y'' + 2y' + y = 0$

Третий порядок $y''' = e^{2x}$

Линейное дифференциальное уравнение

Определение: Дифференциальное уравнение называется линейным, если его левая часть является многочленом от неизвестной функции и ее производных различных порядков, то есть имеет общий вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x)$$

Коэффициенты линейного уравнения

Правая часть, свободный член

Однородное дифференциальное уравнение

Определение Линейное дифференциальное уравнение называется однородным, если его правая часть равна нулю. В противном случае оно называется неоднородным**.**

Решение дифференциального уравнения

Определение Решением дифференциального уравнения называется всякая функция **y=q(x)**, которая после подстановки в уравнение обращает его в тождество относительно x.

Решить, или проинтегрировать, данное дифференциальное уравнение - означает найти все его решения в заданной области.

График решения называется интегральной кривой.

Общее и частное решения

Определение: Общим решением дифференциального уравнения называется решение, которое содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок этого уравнения:

$$y = \varphi\ (x, C_1, C_2, C_3, C_n\ )$$

Определение Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, которое получается из общего, если приписать входящим в него произвольным постоянным определенные значения.

Пример

Дифференциальное уравнение второго порядка:

y’ +y = 0

Нетрудно проверить, что sin x и cos x являются решениями

Общее решение: $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

Частное решение:

y = 2 sin x - 5 cos x

Проверка решений

Если в результате решения некоторого дифференциального уравнения найдена некоторая функция, то подставив эту функцию в уравнение, можно проверить правильность решения.

Пример. Функция: $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x$ есть решение

уравнения: ***y” − 2y + y=0***

Проверка.

$$\begin{aligned} y' &= (C_1 + C_2 + C_2 x)e^x \\ y'' &= (C_1 + 2C_2 + C_2 x)e^x \end{aligned} \Rightarrow\ y'' - 2y' + y = 0$$

Основная задача интегрального исчисления

Основной задачей интегрального исчисления является нахождение функции y производная которой равна заданной непрерывной функции f{x). Эту задачу можно выразить выражения которое по сути есть простейшее дифференциальное уравнение:

$$y' = f(x)$$

Общее решение этого уравнения:

$$y=\int f(x)\,dx + C$$

Дифференциальные уравнения первого порядка

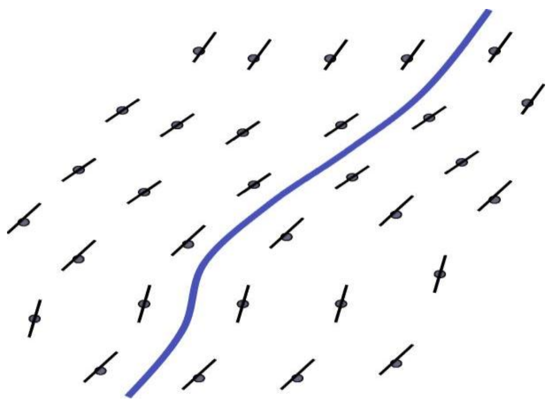
Определение *Уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y(x) и ее производную y'(x), называется дифференциальным уравнением первого порядка:*

$$F(x, y, y') = 0$$

Если уравнение разрешено относительно производной, то оно имеет вид: $y' = f(x)$

Поле направлений

Уравнение $y' = f(x)$



в каждой точке (x, y) плоскости Oxy задает направление интегральной кривой. Говорят, что задается поле направлений.

Решить уравнение означает найти семейство кривых.

Постановка задачи Коши

Задача нахождения решения дифференциального уравнения: удовлетворяющего начальному условию: $y(x_0) = y_0$

где x_0 и y_0 - заданные числа, называется задачей Коши для уравнения первого порядка.

Геометрический смысл

Решить задачу Коши

y'= f(x,y) означает найти интегральную кривую дифференциального уравнения, проходящую через заданную точку ***M_0 (x_0, y_0).***

Уравнение с разделяющимися переменными

Определение: *Дифференциальное уравнение, в котором путем преобразований переменные могут быть разделены, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

Его можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

Пример

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

Объяснение. Покажем, как можно разделить переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} \cdot y$$

$$f(x) \cdot g(y)$$

Пример

Требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

удовлетворяющее начальному условию: У(2) = 6

Решение

1. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

2. Теперь интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

Решение

3. Получаем: $\ln|y| = \ln|x+1| + \ln|C| = \ln|C(x+1)|$

$$y = C(x+1)$$

4. По начальному условию определяем значение константы

$$6 = C(2+1) \Rightarrow C = 2$$

Ответ. Решение дифференциального уравнения

$$y = 2(x+1)$$

Действительно ли уравнение:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

имеет в качестве решения функцию: $y = 2(x+1)$

Проверка.

$$y' = (2(x+1))' = 2 = \frac{2(x+1)}{x+1}$$

Линейные дифференциальные уравнения

Определение Уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка, если оно имеет вид:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - некоторые непрерывные функции переменной x.

Однородное и неоднородное уравнения

Определение: Если функция g(x) тождественно равна нулю, уравнение называется однородным, в противном - неоднородным.

$y' + f(x)\text{-}y = 0$ --однородное уравнение $y' + f(x)\text{-}y = g(x)$ - неоднородное уравнение

Линейное однородное уравнение решается методом разделения переменных. Линейное неоднородное уравнение решается методом вариации постоянных.

Пример

Решить линейное однородное уравнение:

$$y' + x^2 \cdot y = 0$$

Решение

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -x^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{x^3}{3} + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$$

Метод вариации постоянной

1. В методе вариации постоянной сначала находится решение однородного уравнения:

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

2. Затем полагают постоянную C новой неизвестной функцией от x: $C = C(x)$ и находят общее решение неоднородного уравнения:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Пример

Решить линейное неоднородное уравнение:

$$xy' - 2y = 2x^2$$

Решение.

1. Поделим на x:

$$y' - 2\frac{y}{x} = 2x$$

2. Решаем однородное уравнение:

$$y' - 2\frac{y}{x} = 0$$

3. Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

4. Интегрируем

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C| = \ln Cx^2$$

$$y = Cx^2$$

5. Полагаем постоянную новой неизвестной функцией

$y = C(x) \cdot x^2$

Решение

6. Подставляем в уравнение в п.1. и получим:

$$C'(x) \cdot x^2 = 2x^2$$

7. Отсюда находим C(x):

$$C(x) = 2x + C_x$$

8. Ответ. Получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = (2x + C_1) \cdot x^2$$