ЛЕКЦИЯ 5.

ТЕМА: Решение отдельных типов дифференциальных уравнений.

Вопросы темы. Однородные и неоднородные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения. Решение неоднородного дифференциального уравнения методом Бернулли. Решение неоднородного дифференциального уравнения методом Лагранжа. Дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка.

Однородное и неоднородное уравнения

Определение: Если функция g(x) тождественно равна нулю, уравнение называется однородным, в противном - неоднородным.

y' + f(x)-y = 0 --однородное уравнение ***y' + f(x)-y*** = g(x) - неоднородное уравнение

Линейное однородное уравнение решается методом разделения переменных. Линейное неоднородное уравнение решается методом вариации постоянных.

Пример

Решить линейное однородное уравнение:

$$y' + x^2 \cdot y = 0$$

Решение

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -x^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{x^3}{3} + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$$

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (Q(x)≠0) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+P(x)uv=Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y=2x^2$ может быть представлена как $y=1\cdot 2x^2;\quad y=2\cdot x^2;$

$y=2x\cdot x;$ и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx}+P(x)u=0$.

Таким образом, возможно получить функцию u, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u}=-P(x)dx;\qquad \int\frac{du}{u}=-\int P(x)dx;\qquad \ln|u|=-\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1|+\ln|u|=-\int P(x)dx;\qquad u=Ce^{-\int P(x)dx};\quad C=1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции v подставим поученное выражение для функции u в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx}=Q(x);\qquad Cdv=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию v:

$$Cv=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1;\qquad v=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y=uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$, C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа.

(Ларганж Жозеф Луи (1736-1813) - французский математик, през. Берлинской АН,
поч. чл. Пет. АН (1776)).

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом вариации произвольной постоянной.

Вернемся к поставленной задаче:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от х.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

1. В методе вариации постоянной сначала находится решение однородного уравнения:

$$\boldsymbol{y' + f(x) \cdot y = 0}$$

2. Затем полагают постоянную С новой неизвестной функцией от x: $\boldsymbol{C = C(x)}$ и находят общее решение неоднородного уравнения:

$$\boldsymbol{y' + f(x) \cdot y} = g(x)$$

Пример

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Решение: Данное уравнение является линейным неоднородным и имеет известный вид: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

На первом этапе необходимо решить более простое уравнение: $y' + p(x) \cdot y = 0$
То есть, тупо обнуляем правую часть – вместо $q(x)$ пишем ноль.
Уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$ я буду называть *вспомогательным уравнением*.

В данном примере нужно решить следующее вспомогательное уравнение:
$y' + 2xy = 0$

Перед нами **уравнение с разделяющимися переменными**:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int x dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + C^*$$

$$y = e^{-x^2 + C^*}$$

Таким образом:
$y = \widetilde{C}e^{-x^2}$, где $\widetilde{C} = const$ – общее решение вспомогательного уравнения $y' + 2xy = 0$.

На втором шаге **заменим** константу $\widetilde{C}$ некоторой *пока ещё* неизвестной функцией u, которая зависит от «икс»:

$$y = ue^{-x^2}$$

Отсюда и название метода – варьируем константу $\widetilde{C}$. Как вариант, константа $\widetilde{C}$ может быть некоторой функцией u, которую нам предстоит сейчас найти.

В исходном неоднородном уравнении $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ проведём замену:

$$y = ue^{-x^2}$$

По правилу дифференцирования произведения:

$$y' = (ue^{-x^2})' = (u)'e^{-x^2} + u(e^{-x^2})' = u'e^{-x^2} + ue^{-x^2} \cdot (-x^2)' = u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2}$$

Подставим $y = ue^{-x^2}$ и $y' = u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2}$ в уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$:

$$u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2} + 2x \cdot ue^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

Контрольный момент – **два слагаемых в левой части сокращаются**. Если этого не происходит, следует искать ошибку выше.

$$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

В результате замены получено уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем.

$$u' = x$$

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int xdx$$

К найденной функции u приплюсовываем «нормальную» константу C:

$$u = \frac{x^2}{2} + C$$

На заключительном этапе вспоминаем про нашу замену: $y = ue^{-x^2}$

Функция u только что найдена!

Таким образом, общее решение:

$$y = ue^{-x^2} = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2} = Ce^{-x^2} + \frac{x^2e^{-x^2}}{2}$$

Ответ: общее решение: $y = Ce^{-x^2} + \dfrac{x^2e^{-x^2}}{2}$, где $C = const$

.

Дифференциальные уравнения второго порядка

Определение *Уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y(x) производные y'(x) и y"(x), называется дифференциальным уравнением второго порядка:*

F(x, y, y'\y") = 0

Понижение порядка

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения второго порядка может быть сведено к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка. Говорят, что уравнение допускает понижение порядка.

Если дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y'' = \boldsymbol{f(x)}$$

то оно решается последовательным интегрированием.

Пример

Решить уравнение

$$xy'' + y' = 0$$

Решение. Пусть

$$z = y'$$

Тогда исходное уравнение

$$xz' + z = 0$$

Преобразуем:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

Интегрируем, получаем решение:

$$z = \frac{C_1}{x}$$

Возвращаемся к первоначальной функции

$$y' = \frac{C_1}{x} \Rightarrow dy = \frac{C_1 dx}{x}$$

Ответ. Получаем в результате:

$y = C_1 \ln |x| + C_2$

Типы задач, которые нужно уметь решать:

1. Неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.
2. Решение неоднородного дифференциального уравнения методом Бернулли
3. Решение неоднородного дифференциального уравнения методом Лагранжа
4. Дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка.