ЛЕКЦИЯ 6

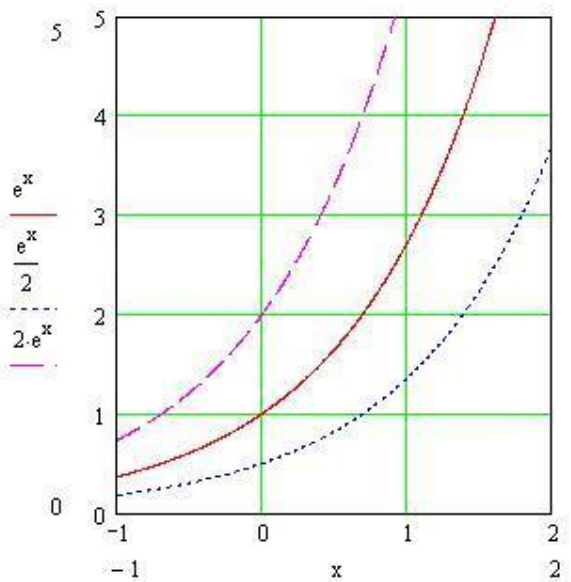
ТЕМА: Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Вопросы темы. Методы решения дифференциальных уравнений. Численные методы решения. Решение систем дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Методы Рунге-Кутты.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений используют следующие классы методов:

1. **Графические.** Методы основаны на геометрических построениях. Например метод изоклин базируется на геометрическом определении интегральной кривой по заранее построенному полю направлений, определенному изоклинами. Изоклина- это линия постоянного наклона *u'=k*.

2. **Аналитические методы**, иначе называются точными, получают решение путем аналитических преобразований в виде формул, как комбинаций элементарных функций. Классы уравнений, к которым применимы точные методы, сравнительно узки и охватывают только малую часть возникающих на практике задач Например. Уравнение *u(x)' =u* можно решить аналитически. Запишем $\frac{du}{dx} = u \Leftrightarrow \frac{du}{u} = dx$. Проинтегрируем обе части $\int \frac{du}{u} = \int dx \Rightarrow \ln u = x + c \Rightarrow u = Ce^x$



3. **Приближенные.** Приближенными называются методы, которые используют различные упрощения самих уравнений путем обоснованного

отбрасывания некоторых содержащихся в них членов. Т.е. решение получается как предел некоторой последовательности функций, причем каждый член этой последовательности выражается через элементарные функции. Например. Метод разложения решения в обобщенный степенной ряд, асимптотические методы. Однако эти методы удобны лишь в случае, когда основную часть выкладок можно сделать точно. А такое ограничение существенно сужает круг задач, для которых целесообразно применять приближенные методы.

4. **Численные методы** – это алгоритмы вычисления приближенных значений искомой функции на сетке, т.е. некотором конечном множестве точек. Решение при этом получается в виде таблицы. Численными методами определяются только частные решения задачи (1), они не позволяют найти общее решение уравнения (1), что является их основным недостатком Однако численные методы могут применяться для решения широкого класса уравнений и ко всем типам задач для таких уравнений. Наибольшее распространение среди численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений получили методы, базирующиеся на методе конечных разностей.

Сущность методов конечных разностей состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргумента заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами. Эти узлы составляют разностную сетку. Сетка - конечное множество точек области определения (отрезка). Функция, определенная в узлах сетки, называется сеточной функцией. Сетку принято обозначать $\omega_h = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $h_i=x_{i+1}-x_i$- шаг сетки, $i=0,1,2,\ldots,n-1\}$, где x_i i=0,1,2,…,n – узлы сетки., $f(x_i)$ – сеточная функция. Сетка называется равномерной сеткой, если шаг сетки h=const будет величиной постоянной. Во всех остальных случаях сетка называется неравномерной. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. При этом для входящих в уравнение производных используют соответствующие конечно-разностные соотношения. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется аппроксимацией на сетке или разностной аппроксимацией. Т.о. решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

В связи с заменой непрерывной функции сеточной функцией возникают вопросы обоснованности замены дифференциальных уравнений сеточными, качества такой аппроксимации, точности получаемых численных решений, устойчивости применяемого метода и т.д.

Численные методы решения ОДУ

Метод Эйлера

Данный метод базируется на применении приближенной формулы $y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Допустим, что необходимо решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ x \in [a, b],\ y(x_0) = y_0.$$

Разобьем $[x_0, b]$ на n одинаковых частей посредством точек $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b,$ и определим их как $x_i - x_{i-1} = h,\ i = \overline{1, n},$ т.е. $h = \frac{b - x_0}{n}$. В этом случае $x_i = x_0 + ih.$

Составим формулу для определения $y_i = \varphi(x_i)$ приближенного решения $y = \varphi(x)$ обозначенной задачи Коши. Вместо уравнения используем приближенное равенство

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow \Delta y = f(x, y)\Delta x.$$

Откуда $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h \Rightarrow y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$

С помощью полученного значения y_1 можно найти y_2 :

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h \Rightarrow y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h.$$

Итак, запишем рекуррентную формулу:

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})h.$$

В результате последовательного соединения на плоскости полученных приближенных точек $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, имеем приближенное изображение интегральной кривой, которая представлена в виде ломанной, называющейся ломанной Эйлера.

Пример: $y' = x - y,\ y(0) = 2.$

Найдем точное решение данного уравнения:

$y = x - 1 + ce^{-x}$ является общим решением, $y = 3e^{-x} + x - 1$ есть решение задачи Коши. Решим его с помощью метода Эйлера при $x \in [0, 1]$, $h = 0{,}2$ и обозначим данные в таблице, в которой уже содержатся для сравнений точные значения y_i:

	x	y_n	$y_n^{\text{точное}}$
	0,00	2,0000	2,0000
	0,20	1,6600	1,6563
	0,40	1,4100	1,4109
	0,60	1,2482	1,2464
	0,80	1,1515	1,1479
	1,00	1,1082	1,1037

Ошибка метода Эйлера предполагает порядок 10^{-2} .

Ввиду малой точности метода существует также несколько приемов его уточнения.

Одна из модификаций метода Эйлера предполагает последовательные приближенные вычисления $\mathbf{y_i}$ через рекуррентную формулу

$y_{i+1}=y_i+h\bullet f(x_i+h/2,\ y_i+h\bullet f(x_i,y_i)/2)$,

$x_{i+1}=x_i+h$.

Метод Рунге— Кутта

Более точными являются вычислительные схемы Рунге— Кутта. Они различаются между собой порядком в зависимости от требуемой точности.

Рассмотрим метод Рунге— Кутта четвертого порядка.

В этом случае последовательные приближенные вычисления $\mathbf{y_i}$ осуществляются в соответствии с формулой:

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i,\quad \Delta y_i=\frac{1}{6}(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)}),$$

$$k_1^{(i)}=f(x_i,y_i)h,\ k_2^{(i)}=f(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_i^{(i)}}{2})h,$$

$$k_3^{(i)}=f(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_2^{(i)}}{2})h,\ k_4^{(i)}=f(x_i+h,y_i+k_3^{(i)})h.$$

Имеются также вычислительные схемы метода Рунге— Кутта и для уравнений 2, 3, 4-го порядков.

Пример: $y'=y-\frac{2x}{y},\ y(0)=1.$

Таблица решения задачи Коши для данного дифференциального уравнения при $h=0{,}2$.

	y	x	k	$y+$	k	$y+$	k	y	k	Δ
,0	1,0000	0,1	0,2000	1,1000	0,1836	1,0918	0,1819	1,1819	0,1687	0,1833
,2	1,1833	0,3	0,1691	1,2679	0,1589	1,2628	0,1574	1,3408	0,1488	0,1584
,4	1,3417	0,5	0,1491	1,4162	0,1420	1,4127	0,1410	1,4827	0,1347	0,1416
,6	1,4833	0,7	0,1349	1,5507	0,1296	1,5481	0,1288	1,6121	0,1239	0,1292
,8	1,6125	0,9	0,1240	1,6745	0,1199	1,6725	0,1193	1,7318	0,1154	0,1196
,0	1,7321									

Системы дифференциальных уравнений и их решение.

Системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1 .. y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1 .. y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1 .. y_n) \end{cases}$$

или

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1 .. y_n), i = \overline{1, n}$$

где x - независимый аргумент,

y_i - зависимая функция, $i = \overline{1, n}$,

$y_i|_{x=x0} = y_{i0}$ - начальные условия.

Функции $y_i(x)$, при подстановке которой система уравнений обращается в тождество, называется решением системой дифференциальных уравнений.

Численные методы решения систем дифференциальных уравнений.

Метод Эйлера.

$y_{ij+1}=y_{ij}+h \bullet f_i(x_i,y_{1j}\ y_{2j}..y_{nj})$

$i = \overline{1, n}$

j - номер шага.

$x_{j+1}=x_j+h$

Модифицированный метод Эйлера.

$k_{i1}=h \bullet f_i(x_j,y_{1j}..y_{nj})$

$k_{i1}=h \bullet f_i(x_j+h,y_{1j}+k_{i1}..y_{nj}+k_{i2})$

$y_{ij+1}=y_{ij}+(k_{i1}+k_{i2})/2$

$x_{j+1}=x_j+h$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

$k_{i1}=h \bullet f_i(x_j,y_{1j}..y_{nj})$

$k_{i2}=h \bullet f_i(x_j+h/2,y_{2j}+k_{i1}/2,..,y_{nj}+k_{n1}/2)$

$k_{i3}=h \bullet f_i(x_j+h/2,y_{2j}+k_{i2}/2,..,y_{nj}+k_{n2}/2)$

$k_{i4}=h \bullet f_i(x_j+h,y_{1j}+k_{i2},..,y_{nj}+k_{n3})$

$y_{ij+1}=y_{ij}+(k_{i1}+2k_{i2}+2k_{i3}+k_{i4})/6$

$x_{j+1}=x_j+h$

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$F(x,y,y',y'')=0 \qquad (1)$$

или

$$y''=f(x,y,y'). \qquad (2)$$

Функция y(x), при подстановке которой уравнение обращается в тождество, называется <u>решением дифференциального уравнения</u>.

Численно ищется частное решение уравнения (2), которое удовлетворяет заданным начальным условиям, то есть решается задача Коши.

Для численного решения дифференциальное уравнение второго порядка преобразуется в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка и приводится к <u>*машинному виду*</u> (3). Для этого вводится новая неизвестная функция $y_1 = \frac{dy}{dx}$, слева в каждом уравнении системы оставляют только первые производные неизвестных функций, а в правых частях производных быть не должно

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y \\ \frac{dy}{dx} = y_1 = f_2(x, \end{cases} \qquad (3)$$

.

Функция $f_2(x, y_1, y)$ в систему (3) введена формально для того, чтобы методы, которые мы рассмотрим, могли быть использованы для решения произвольной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим несколько численных методов решения системы (3). Расчетные зависимости для i+1 шага интегрирования имеют следующий вид. Для решения системы из n уравнений расчетные формулы приведены выше. Для решения системы из двух уравнений расчетные формулы удобно записать без двойных индексов в следующем виде:

<u>Метод Эйлера</u>.

$y_{1,i+1}=y_{1,i}+h\bullet f_1(x_i, y_{1,i}, y_i)$,

$y_{i+1}=y_i+h\bullet f_2(x_i, y_{1,i}, y_i)$,

$x_{i+1}=x_i+h$.

<u>Метод Рунге-Кутта четвертого порядка</u>.

$y_{1,i+1}=y_{1,i}+(m_1+2m_2+2m_3+m_4)/6$,

$y_{i+1}=y_i+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6$,

$m_1=h\bullet f_1(x_i, y_{1,i}, y_i)$,

$k_1=h\bullet f_2(x_i, y_{1,i}, y_i)$,

$m_2=h \cdot f_1(x_i+h/2,\ y_{1,i}+m_1/2,\ y_i+k_1/2)$,

$k_2=h \cdot f_2(x_i+h/2,\ y_{1,i}+m_1/2,\ y_i+k_1/2)$,

$m_3=h \cdot f_1(x_i+h/2,\ y_{1,i}+m_2/2,\ y_i+k_2/2)$,

$k_3=h \cdot f_2(x_i+h/2,\ y_{1,i}+m_2/2,\ y_i+k_2/2)$,

$m_4=h \cdot f_1(x_i+h,\ y_{1,i}+m_3,\ y_i+k_3)$,

$k_4=h \cdot f_2(x_i+h,\ y_{1,i}+m_3,\ y_i+k_3)$,

$x_{i+1}=x_i+h$,

где h - шаг интегрирования. Начальные условия при численном интегрировании учитываются на нулевом шаге: $i=0$, $x=x_0$, $y_1=y_{10}$, $y=y_0$.