Лекция 7.

ТЕМА. Элементы теории множеств

Вопросы темы. Множество; элемент множества; числовые множества; конечные множества; бесконечные множества. Подмножества; пустое множество; объединение множеств; пересечение множеств; разность множеств; симметрическая разность множеств; декартово произведение множеств. Отображение; образ; прообраз; сюръективное отображение; инъективное отображение; биективное отображение. Мощность множества.

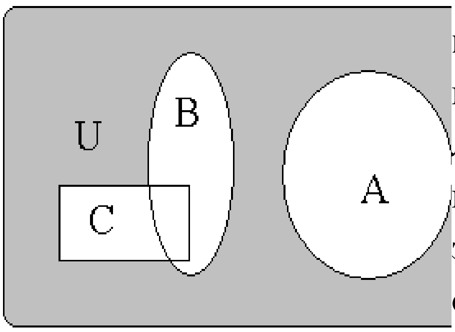
Основные понятия

Множество – одно из важнейших понятий математики. Вводится аксиоматически и не может быть определено через какие-либо элементарные понятия.

Кантор описывает множество следующим образом:

Множество S есть любое собрание определенных и различимых между собой объектов нашей интуиции и интеллекта, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются элементами множества S.

Термин «множество» характеризует совокупность, объединение некоторых объектов произвольной природы – элементов множества, которые обладают каким-либо общим для них свойством (признаком). Этот общий признак содержится в самом названии (задании) множества. Множество состоит из элементов и считается ***заданным***, если о каждом из рассматриваемых объектов известно, входит он во множество или нет. Множество может быть задано либо перечислением его элементов, либо описанием свойств его элементов. Символическая запись $a \in A$ означает принадлежность элемента a множеству A. Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.



$A \subseteq U$; $B \subseteq U$;$C \subseteq U$.

Рис. 2.1.

Множество A называют **подмножеством** другого множества U или множество A ***включено во множество*** U, если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества U. Это обозначается $A \subseteq U$. Выделение подмножеств из множеств можно провести по различным признакам. В результате могут получиться как непересекающиеся подмножества (например, A и B), так и подмножества, имеющие общие элементы (B и C).

Если множество состоит из конечного числа элементов, оно называется конечным. При этом число элементов множества может быть очень велико или вообще неизвестно. Множество может состоять также из бесконечного количества элементов, тогда оно называется бесконечным.

Свойства включения:

1. Каждое множество есть подмножество самого себя $A \subseteq A$;
2. Если $A \subseteq B$, а $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$, т.е. множества A и B *равны* тогда и только тогда, когда эти множества состоят из одних и тех же элементов;
4. Каждый элемент множества A определяет некоторое подмножество множества A: $a \in A \Rightarrow \{a\} \subseteq A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается $\varnothing$.

1. Любое множество содержит $\varnothing$ в качестве подмножества.
2. Каждое множество $A \neq \varnothing$ имеет, по крайней мере, два различных подмножества: A и $\varnothing$.

Множество A и $\varnothing$ называют ***несобственными*** подмножествами множества A. Все остальные подмножества множества A называются ***собственными*** или ***истинными***. В этом случае, когда $B \subseteq A \wedge B \neq A$ говорят, что B ***строго включено*** в A (обозначается $B \subset A$):

$$A \subseteq B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

$$A \subset B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$$

$$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

Множество всех подмножеств множества A называется **множеством-степенью** $\mathrm{P}(A)$ множества A.

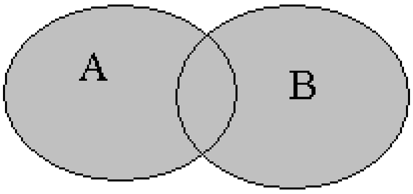
Если A не содержит элементов, т.е. $A=\varnothing$, то его единственным подмножеством является $\varnothing$.

Если A – одноэлементное множество, т.е. $A=\{a\}$, то его подмножествами являются A и $\varnothing$. Число этих подмножеств равно 2.

Если A – двухэлементное множество, т.е. $A=\{a,b\}$, то его подмножествами являются $\{a\}$, $\{b\}$, A и $\varnothing$. Число этих подмножеств равно 4.

Несложно убедиться в том, что множество-степень Р (A) конечного n–элементного множества (A) состоит из 2^n подмножеств.

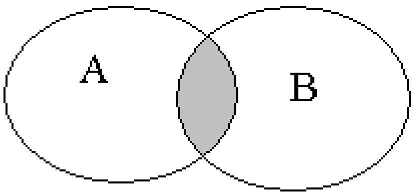
Основные операции над множествами



$A \cup B$

Рис. 2.2.

Суммой или **объединением** двух или произвольного (даже бесконечного) числа заданных множеств называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из заданных множеств. Эта операция над множествами обозначается знаком $\cup$.

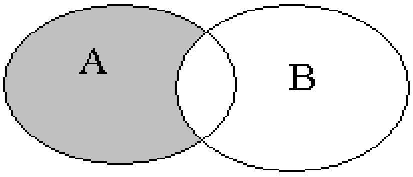


$A \cap B$

Рис. 2.3.

Произведением или пересечением двух или произвольного (даже бесконечного) числа заданных множеств называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из заданных множеств. Эта операция над множествами обозначается знаком $\cap$. Если $A \cap B=\varnothing$, то множества A и B называются непересекающимися.

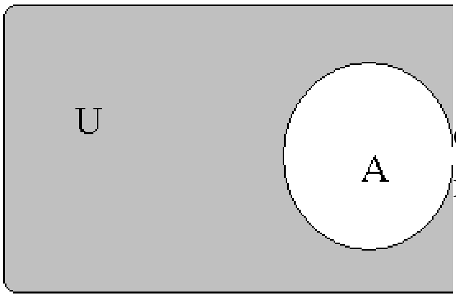
Два множества называются **непересекающимися** (или расчлененными) если $A \cap B=\varnothing$. Практический интерес представляют разбиения множества на взаимно непересекающиеся подмножества (эту задачу иногда называются *классификацией*). **Разбиением** множества A называется такая расчлененная система непустых подмножеств множества A, что каждый элемент множества A является элементом некоторого единственного множества этой системы. Возможность разбиения множества на непересекающиеся подмножества зависит от признака, по которому производится разбиение.



$A \setminus B$

Рис. 2.4.

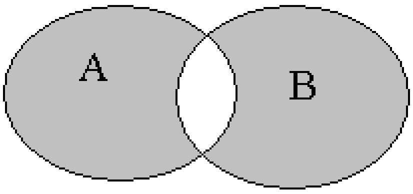
Разностью множеств A и B или **дополнением** B до A называется множество, состоящее только из тех элементов A, которые не входят в B. Эта операция над множествами обозначается знаком $\setminus$.



$C_U A = \overline{A}$

Рис. 2.5.

Часто все рассматриваемые множества считают подмножествами одного основного множества U. В таком случае разность $U \setminus A$ (дополнение A до U) обозначают, как $\overline{A}$, а операцию называют взятием дополнения.



$A \Delta B$

Рис. 2.6.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество C:

$$C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Обозначается симметрическая разность: $C = A \Delta B$ или $C = A \oplus B$.

Для подмножеств данного множества U выполняются следующие законы:

- ***Закон коммутативности*** (переместительный закон):

$$A \cup B = B \cup A; \; A \cap B = B \cap A;$$

- ***Закон ассоциативности*** (сочетательный закон) для любой тройки множеств A, B и C:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

- ***Закон дистрибутивности*** (распределительный закон) для любой тройки множеств A, B и C:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

- $\varnothing \cup A = A$; $U \cap A = U$;
- $U \cup A = U$; $\varnothing \cap A = \varnothing$;

- $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
- $\overline{\varnothing} = U$;
- $\overline{\overline{A}} = A$;
- $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;
- $A \cup U = U$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;
- $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$;
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Если операции объединения множеств поставить в соответствие операцию сложения чисел, операции пересечения множеств – операцию умножения, универсальному множеству U – единицу, а пустому множеству – ноль, то возникает аналогия между множествами и числами. Операции объединения и пересечения множеств, как и действия над действительными числами, подчиняются законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Можно также провести аналогию между свойствами логических операций, где логической эквивалентности соответствует операция равенства, а операциям конъюнкции и дизъюнкции – операции объединения и пересечения.

Свойства фигурируют попарно таким образом, что каждое получается из соседнего заменой $\cup$ на $\cap$, U на $\varnothing$ и наоборот. Такие выражения называются ***двойственными друг другу***.

Принцип двойственности. Для любого тождества множеств двойственное ему выражение также является тождеством.

Очевидно, что операция **разность** не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, в то же время операция **симметрическая разность** и коммутативна, и ассоциативна.

Большое значение в современной математике имеет множественная операция декартово произведение**.** Если заданы два множества A и B, то из их элементов можно составить упорядоченные пары, взяв сначала какой-либо элемент первого множества, а затем – элемент второго множества. Декартовым произведением двух исходных множеств A и B называется множество C, составленное из упорядоченных пар (a,b). Декартово произведение множеств A и B обозначается $A \times B$.

Очевидно, что $A \times B$ и $B \times A$ - различные множества, т.е. операция декартова произведения не коммутативна, но, в то же время, она обладает свойством ассоциативности.

Отображения

<u>**Отображение**</u> – одно из основных понятий математики. Отображение есть какое-либо правило или закон соответствия множеств. Пусть X и Y – произвольные непустые множества. Говорят, что задано отображение f множества X на множество Y (запись: $X \xrightarrow{f} Y$ или $f: X \to Y$) если каждому элементу x множества X ($x \in X$) поставлен соответствие единственный, однозначно определенный элемент $y = f(x)$ множества Y ($y \in Y$).

Элемент $y = f(x)$ называется **образом** элемента x при отображении f, а элемент $x = f^{-1}(y)$ называется **прообразом** элемента y при этом отображении. Образом множества X элементов x при отображении f называется множество всех элементов вида $f(x)$, принадлежащих области значений Y. Множество X всех элементов x ($x \in X$), образы которых $y = f(x)$ составляют область значений Y называется **прообразом** множества Y элементов y ($y \in Y$). Множество X называется **областью определения** отображения f.

Отображение $f: X \to Y$ называется **сюръективны*м***, когда каждый элемент y множества Y ($y \in Y$) имеет хотя бы один прообраз x множества X ($x \in X$), т.е. $\operatorname{Im} f = Y$, или $f^{-1}(y) \neq \varnothing$.

Отображение $f: X \to Y$ называется **инъективным**, когда каждый элемент $y = f(x)$ множества Y ($y \in Y$) является образом лишь одного элемента x множества X ($x \in X$), т.е. образы любых двух различных элементов множества X различны, т.е. из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Отображение $f: X \to Y$ называется **биективным** или **взаимно однозначным**, когда оно одновременно инъективно и сюръективно, т.е. каждый элемент множества Y является образом одного и только одного элемента множества X.

Равенство двух отображений $f: X \to Y$ и $g: U \to V$ означает по определению, что их соответствующие области совпадают ($X = U$ и $Y = V$), причем $f(x) = g(x) \;\; \forall x \in X$.

Произведение двух отображений $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ можно определить как отображение $h: X \to Z$, которое каждому элементу x

множества X $\left(x \in X\right)$ ставит в соответствие элемент $g\left(f\left(x\right)\right)$ множества Z $\left(g\left(f\left(x\right)\right) \in Z\right)$.

Отображение f множества X на множество Y иначе называется функцией на множестве X со значениями во множестве Y. Если множества X и Y совпадают, то биективное отображение множества X на себя $f: X \to X$ называется **преобразованием** множества X. Простейшее преобразование множества X – **тождественное** $Id: X \to X$ – определяется так: $Id(x) = x \quad \forall x \in X$. Тождественное отображение $Id: X \to X$, переводящее каждый элемент $x \in X$ в себя, также называют **единичным** преобразованием. Если заданы преобразования $f: X \to X$ и $g: X \to X$, то преобразование $h: X \to X$, являющееся результатом последовательного выполнения сначала преобразования f, а затем и преобразования g, называется **произведением преобразований** f и g: $h = f \circ g$.

Для преобразований f, g и h одного и того же множества X справедливы следующие законы:

- $\left(f \circ g\right) \circ h = f \circ \left(g \circ h\right)$
- $Id\left(X\right) \circ f = f \circ Id\left(X\right) = f$
- $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id\left(X\right)$

Коммутативный закон для произведения преобразований в общем случае не выполняется, т.е. $f \circ g \neq g \circ f$.

Если между двумя множествами можно задать *биективное* отображение (установить взаимно однозначное соответствие между их элементами), то такие множества называются **эквивалентными** или **равномощными**. Конечные множества равномощны только в том случае, когда число их элементов одинаково.

Бесконечные множества также можно сравнивать между собой.

Два множества имеют одинаковую мощность или называются эквивалентными (обозначение $A = B$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, т.е. если можно указать некоторое правило, в соответствии с которым каждому элементу одного из множеств соотносится один и только один элемент другого множества.

Если же подобное отображение невозможно, то множества имеют различную мощность; при этом оказывается, что в последнем случае, каким бы образом мы не пытались привести в соответствие элементы обоих множеств, всегда останутся лишние элементы и притом всегда от одного и того же множества, которому приписывается более высокое значение кардинального числа или говорят, что это множество имеет **бóльшую мощность**.

Бесконечное множество и некоторое его подмножество могут быть эквивалентными.

Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется счетным множеством. Для того чтобы множество A было счетным, необходимо и достаточно, чтобы каждому элементу a множества A был поставлен в соответствие его порядковый номер $A=\{a_n|_{n\in N}\}$. Из всякого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество. Всякое подмножество счетного множества является счетным или конечным. Счетное множество является наиболее примитивно организованным бесконечным множеством. Декартово произведение двух счетных множеств является счетным. Объединение конечного или бесконечного числа конечных или счетных множеств является конечным или счетным множеством.

Отношения эквивалентности и упорядоченности

В математике понятие отношения используется для обозначения какой-либо связи между объектами. **Отношение** есть некоторое множество упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$.

❖ Отношение называется ***рефлексивным***, если каждый элемент множества находится в этом отношении сам с собой ($x\rho x$).

❖ Отношение называется ***симметричным***, если оно обладает свойством коммутативности ($x\rho y \Rightarrow y\rho x$).

❖ Отношение называется ***транзитивным***, если $x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$.

❖ Отношение называется ***антисимметричным,*** если $x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$.

Часто приходится рассматривать несколько элементов множества как эквивалентные, потому что по определенным признакам один элемент может быть заменен другим. Так, например, по признаку величины дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{4}$ эквивалентны. Отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Понятие эквивалентности подразумевает выполнение следующих условий:

- каждый элемент эквивалентен самому себе;

- высказывание, что два элемента являются эквивалентными, не требует уточнения, какой из элементов рассматривается первым;
- два элемента, эквивалентные первому, эквивалентны между собой.

Пусть A – множество, в котором определено отношение эквивалентности. Подмножество элементов, эквивалентных элементу a, называется классом эквивалентности: все элементы этого класса эквивалентны между собой и всякий элемент a из A находится в одном и только в одном классе (если элементов, эквивалентных a, не существует, то a может быть и единственным элементом класса). Отношение эквивалентности в A определяет на A разбиение на классы эквивалентности, т.е. A становится объединением непересекающихся классов.

Особенности природы элементов множества в большинстве случаев позволяют установить между ними отношения полного (или совершенного) порядка. Это отношение по определению обладает следующими свойствами:

$$\forall a, \forall b, \forall c$$

$$a \in A, b \in A, c \in A$$

$$\begin{cases} a < a - \textit{ложно} \\ a < b, b < a - \textit{взаимоисключаются} \\ [a < b, b < c] \Rightarrow a < c \end{cases}$$

Если между элементами множества определено также и отношение эквивалентности, то между элементами устанавливается отношение неполного или нестрогого порядка:

$$\forall a, \forall b, \forall c$$

$$a \in A, b \in A, c \in A$$

$$\begin{cases} a \le a - \textit{верно} \\ [a \le b, b \le a] \Rightarrow [a = b] \\ [a \le b, b \le c] \Rightarrow [a \le c] \end{cases}$$

Возможны случаи, когда некоторые элементы множества не сравнимы. Такие множества называются **частично упорядоченными**.