ЛЕКЦИЯ 8

ТЕМА: Элементы комбинаторики

Вопросы темы. Правило суммы. Правило произведения. Размещения. Перестановки. Сочетания. Комбинации с повторениями. Схема определения вида комбинации

Все разнообразие комбинаторных формул может быть выведено из двух основных утверждений, касающихся конечных множеств – **правило суммы** и **правило произведения**.

Правило суммы: пусть имеется **n** попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, содержащих $m_1, m_2, \ldots, m_n$ элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать один элемент из всех этих множеств, равно $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Пример. Если на первой полке стоит **X** книг, а на второй **Y**, то выбрать книгу с первой или второй полки, можно **X+Y** способами.

Пример. Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?

Решение: По правилу суммы получаем 17+13=30 вариантов.

Кортеж - конечная последовательность (допускающая повторения) элементов какого-нибудь множества.

Правило произведения: пусть имеется **n** множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ содержащих $m_1, m_2, \ldots, m_n$ элементов соответственно. Число способов, которыми можно выбрать по одному элементу из каждого множества, т. е. построить кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i \in A_{i1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, равно $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$.

Пример. Если на первой полке стоит 5 книг, а на второй 10, то выбрать одну книгу с первой полки и одну со второй можно 5*10=50 способами.

Пример. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневые переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

Решение. Имеется 12 книг и 3 цвета, значит по правилу произведения возможно 12*3=36 вариантов переплета.

Выборки. Если из множества предметов выбирается некоторое подмножество, то его называют **выборкой**. Выборки бывают **упорядоченные** и **неупорядоченные**.

В упорядоченной выборке существенен порядок, в котором следуют ее элементы, другими словами, изменив порядок элементов, мы получим другую выборку.

Пример. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить следующие трехзначные числа 123, 431, 524, ...и т.д. Это упорядоченные трехэлементные выборки, так как 123 и 132 - разные числа.

Пример. Из 20 учащихся класса выбрать двух дежурных. Любая пара дежурных представляет собой неупорядоченную двухэлементную выборку, так как порядок их выбора не важен.

Размещения

Размещениями из **n** элементов по **m** элементов (m < n) называются комбинации, составленные из данных **n** элементов по **m** элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число размещений без повторений из **n** по **m** (n различных элементов) вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Размещениями с повторениями из **n** элементов по **m** называются упорядоченные **m**-элементные выборки, в которых элементы могут **повторяться**.

Число размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m \qquad \textbf{(3.2)}$$

Пример. Возьмем буквы **Б, А, Р**. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получиться, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) буквы могут повторяться?

Решение.

1. Получатся следующие наборы: **БА, БР, АР, АБ, РБ, РА**.

   По формуле (3.1) получаем: $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$ наборов.

2. Получатся наборы: **ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.**

   По формуле (3.2) получаем: $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$. наборов.

Пример. Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: "красный", "желтый", "зеленый"?

Решение. Выпишем несколько комбинаций: КККЖЗЗ, ЗЗЗЗЗЗ, КЖЗКЖЗ... Мы видим, что состав выборки меняется и порядок элементов существенен (ведь если, например, в выборке КЖЗКЖЗ поменять местами К и Ж, ситуация на дороге будет другой). Поэтому применяем формулу (3.2) и вычисляем число размещений с повторениями из 3 по 6, получаем $\tilde{A}_3^6 = 3^6 = 729$ комбинаций.

Перестановки

Перестановками из **n** элементов называются размещения из этих n элементов по **n** (Перестановки - частный случай размещений).

Число перестановок без повторений (n различных элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n! \qquad \textbf{(3.3)}$$

Число перестановок с повторениями (k различных элементов, где элементы могут повторяться $m_1, m_2, \ldots, m_k$ раз и $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, где n - общее количество элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}. \qquad \textbf{(3.4)}$$

Пример. Возьмем буквы **Б, А, Р**. Какие перестановки из этих букв можно получить? Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) буква А повторяется два раза?

Решение.

1. Получатся наборы: **БАР, БРА, АРБ, АБР, РАБ, РБА.**

По формуле (3.3) получаем: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$ наборов.

2. Получатся наборы: **БАРА, БРАА, БААР, ААРБ, ААБР, АБАР, АРАБ, АРБА, АБРА, РАБА, РААБ, РБАА.**

   По формуле (3.4) получаем: $P_4(2,1,1) = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 3 \cdot 4 = 12.$ наборов.

Пример. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числе не повторялись?

Решение. Из данных шести цифр можно составить $P_6 = 6! = 720$ перестановок. Но числа, начинающиеся на нуль, не являются шестизначными. Такие числа отличаются друг от друга перестановкой пяти остальных цифр, значит, их будет $P_5 = 120$. Поэтому шестизначных чисел будет 720 - 120 = 600 чисел.

Пример. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

Решение. Первая линия шахматной доски представляет собой 8 клеток, на которых и надо расположить эти 8 фигур. Различные варианты расположения будут отличаться только порядком фигур, значит, это будут перестановки с повторениями P_8 (2,2,2).

По формуле (3.4) получаем: $P_8(2,2,2) = \frac{8!}{2!2!2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 5040$ способов.

Сочетания

Сочетаниями из n элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных **n** элементов по **m** элементов, которые различаются хотя бы одним элементом (отличие сочетаний от размещений в том, что в сочетаниях не учитывается порядок элементов).

Число сочетаний без повторений (**n** различных элементов, взятых по **m**) вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Число сочетаний с повторениями (**n** элементов, взятых по **m**, где элементы в наборе могут повторяться) вычисляется по формуле:

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!} \qquad \textbf{(3.6)}$$

Пример. Возьмем буквы **Б, А, Р**. Какие сочетания из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) можно брать по два одинаковые буквы.

Решение.

1. Получатся наборы: **БА** (**БА** и **АБ** - один и тот же набор), **АР** и **РБ**

   По формуле (3.5) получаем: $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1} = 3$ наборов.

2. Получатся наборы: **ББ, БА, БР, АА, АР, РР.**

   По формуле (3.6) получаем: $\tilde{C}_3^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 3\cdot 2 = 6$ наборов.

Пример. Из 20 учащихся надо выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Надо выбрать двух человек из 20. Ясно, что от порядка выбора ничего не зависит, то есть Иванов-Петров или Петров-Иванов - это одна и та же пара дежурных. Следовательно, это будут сочетания из 20 по 2.

По формуле (3.5) получаем: $C_{20}^2 = \frac{20\cdot 19}{1\cdot 2} = 190$ способов.

Пример. В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

Решение. Обозначая булки белого и черного хлеба буквами Б и Ч, составим несколько выборок: ББББББ, ББЧЧББ, ЧЧЧЧЧБ, ... Состав меняется от выборки к выборке, порядок элементов несущественен, значит это - сочетания с повторениями из 2 по 6. По формуле (3.6) получаем $\tilde{C}_2^6 = C_{2+6-1}^6 = C_7^6 = C_7^1 = 7$ способов.

Сделаем проверку и выпишем все варианты покупки: ББББББ, БББББЧ, ББББЧЧ, БББЧЧЧ, ББЧЧЧЧ, БЧЧЧЧЧ, ЧЧЧЧЧЧ. Их действительно 7.

Схема определения вида комбинации:

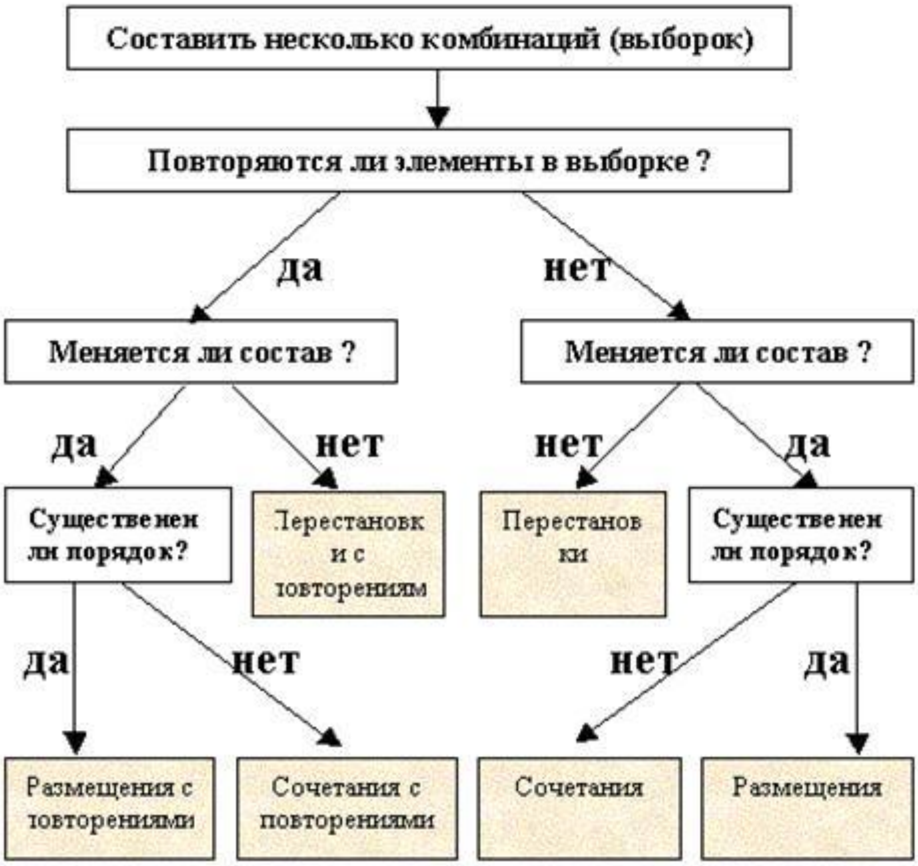
Составить несколько комбинаций (выборок)
Повторяются ли элементы в выборке ?
да
нет
Меняется ли состав ?
Меняется ли состав ?
да
нет
нет
да
Существенен ли порядок?
Перестановки с повторениям
Перестановки
Существенен ли порядок?
да
нет
нет
да
Размещения с повторениями
Сочетания с повторениями
Сочетания
Размещения

Рис. 1.