ЛЕКЦИЯ 9

ТЕМА: Основные понятия теории графов

Вопросы темы. Неориентированные графы. Способы задания графа. Матрицы смежности и инцидентности графа. Двудольные графы. Паросочетания. Степени вершин графа. Маршруты и пути графа. Свойство связности. Аксиомы метрики на графе. Диаметр, радиус и центр графа. Теорема Эйлера. Задачи на применение теории графов.

Неориентированные графы

Графом (G) будем называть тройку объектов (V, E, θ(E))

V – множество n вершин.

E – конечное множество ребер.

θ(E)- функция инцидентности, которая каждому элементу множества E ставит в соответствие пару элементов из множества V.

θ(E) задана на множестве E.

Вершина **v** называется инцидентной ребру **e** , если ребро соединяет эту вершину с какой-либо другой вершиной.

Вершины и рёбра графа называются также элементами графа.

Число вершин в графе $|V|$ называется порядком графа.

Число рёбер $|E|$ называется размером графа.

Вершины **u** и **v** vназываются концевыми вершинами (или просто концами) ребра **e={u,v}**. Ребро, в свою очередь, соединяет эти вершины.

Две концевые вершины одного и того же ребра называются сопряженными (или смежными).

Два ребра называются смежными, если они имеют общую концевую вершину.

Два ребра называются кратными, если множества их концевых вершин совпадают.

Ребро называется петлёй, если его концы совпадают, то есть **e={v,v}**.

Инцидентность

Вершина называется изолированной, если она не является концом ни для одного ребра;

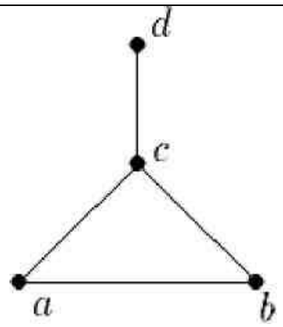
висячей (или листом), если она является концом ровно одного ребра.

Графы делятся на два типа, обычные и сложные.

Способы задания графов

1. Аналитический посредством **списков** А)Выписываются все ребра и пишутся напротив пары вершин, которым они инцидентны. (Если вершине не инцидентно никакое ребро, то эта вершина называется изолированной.) В конце выписываются все изолированные вершины. Б) Списком пар вершин, соединенных ребрами (или дугами); В) Списком списков для каждой вершины множества смежных с ней вершин.	

2. <u>Геометрический</u>: Каждая вершина графа задается точкой. А ребра, инцидентные паре вершин – кривой, соединяющей эти вершины. Желательно рисовать кривые без пересечения. Если пересечения существуют, то их надо отличать от вершин.



3. <u>Матрицей смежности:</u>
Матрица смежности - квадратная матрица, размерности, равной количеству вершин. При этом a[i, j]-целое число, равное количеству рёбер, связывающих i-ю, j-ю вершину. Если в графе нет петель, то диагональные элементы равны 0 .
Если рёбра не повторяются, то все элементы 0 или 1. Если граф неориентированный, то матрица симметрична.

	a	B	c	d
a	0	1	1	0
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
D	0	0	1	0

4. С помощью матрицы инцидентности
A(m*n)
m = [V] – число вершин
n = [E}- число ребер ти:

	a	B	c	d
A	1	1	0	0
B	0	1	1	0
C	1	0	1	0
D	0	0	1	1

<u>Помеченным</u> называется граф, вершинам которого приписаны метки (номера, цвета и т.п.)
Два помеченных графа G1(V1,E1) и G2(V2,E2) <u>равны</u>, если V1=V2, E1=E2 и сохраняется разметка.

Изоморфизм

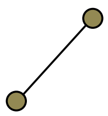
Говорят, что два графа G1(V1,E1) и G2(V2,E2) <u>изоморфны</u> (G1 ~ G2), если существует биекция (взаимно-однозначное отображение) f : V1 → V2, сохраняющая <u>смежность</u>:

Виды и свойства графов.

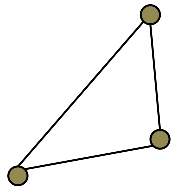
Определение. Граф, в котором нет кратных ребер и петель, называется <u>простым</u>.
Граф, в котором имеются кратные ребра и (или) петли, называется <u>мультиграфом</u>
Простой граф называется <u>полным</u>, если любой паре его вершин инцидентно одно ребро.

K1 – полный граф с одной вершиной

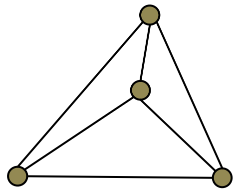
K2 – с двумя



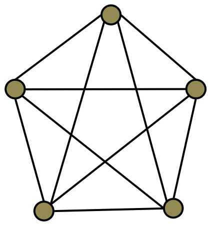
K3 – с тремя



K4 – полный граф с четырьмя вершинами

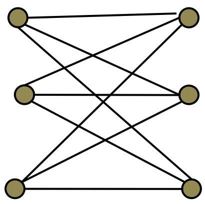


K5 – полный пятивершинник



Определение. Граф называется двудольным, если множество вершин разбивается на 2 непересекающихся подмножества, таких, что ребра соединяют вершины из разных подмножеств.

Определение. Двудольный граф называется полным, если каждая вершина одного подмножества соединена ребром с каждой вершиной другого подмножества.



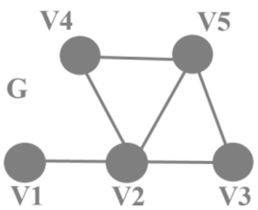
Полный двудольный граф.

Маршруты и пути графа.

Одно из наиболее простых свойств, которым может обладать граф это свойство быть *связным*.

Определение. Маршрут в графе – чередующаяся последовательность вершин и ребер.

Эта последовательность начинается и кончается вершиной, и каждое ребро последовательности инцидентно двум вершинам, одна из которых непосредственно предшествует ему, а другая непосредственно следует за ним



Граф для иллюстрации маршрутов

Указанный маршрут соединяет вершины Vo и Vn, и его можно обозначить $Vo, V_1, V_2, .., V_n$ (наличие ребер подразумевается).

Эта последовательность иногда называется **(Vo-Vn) - маршрутом**.

Маршрут **замкнут**, если Vo = Vn, и **открыт** в противном случае.

Цепь – маршрут с различными ребрами.

Простая цепь – цепь с различными вершинами (а значит, и ребрами).

Цикл – замкнутая цепь.

Простой цикл – замкнутая простая цепь, у которго все n вершин различны и n >= 3.

В помеченном графе G на рис.1 $V_1,V_2,V_3,V_5,V_4,V_2,V_3$ - маршрут, который не является цепью, а V_1,V_2,V_5,V_4,V_2,V_3 - цепь, где V_1,V_2,V_5,V_4 - простая цепь и V_2,V_4,V_5,V_2 - простой цикл.

Обозначим через Gn граф состоящий из одного простого цикла с n вершинами, и через Pn простую цепь с n вершинами. Gn часто называют **треугольником**.

Свойство связности.

Граф G называется **связным**, если любая пара его вершин соединена простой цепью.

Подграфом графа G(V, E) называется граф G'(V', E'), если V' и E' являются подмножествами V и E , причем ребро e содержится в G'(V', E') только в том случае, если его концевые вершины содержатся в V.

Максимальный связный подграф графа G называется компонентой связности или просто компонентой графа G.

Таким образом, несвязный граф имеет по крайней мере две компоненты.

Окрестности

Сопряжённой (смежной) вершиной вершины v называется вершина, соединённая с v ребром.

Окрестностью вершины v в графе G называется порождённый подграф графа G, состоящий из всех вершин, сопряжённых v и всех рёбер, соединяющих две такие вершины. Окрестность часто обозначается как $N_G(v)$ или N(v).

Окрестность, описанная выше, не включает саму вершину v и об этой окрестности говорят как об открытой окрестности вершины v. Можно определить окрестность, включающую v. В этом случае окрестность называется закрытой и и обозначается как $N_G[v]$.

Степени

Степенью deg v вершины v называют количество инцидентных ей рёбер (при этом петли считают дважды).

СТЕПЕНЬ = ВАЛЕНТНОСТЬ = ЛОКАЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ

Степень обозначается **di** или **deg Vi**.

Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, в сумму степеней вершин графа каждое ребро вносит двойку.

Таким образом, верно утверждение, которое установлено Эйлером и является исторически **первой теоремой теории графов**.

ТЕОРЕМА Эйлера

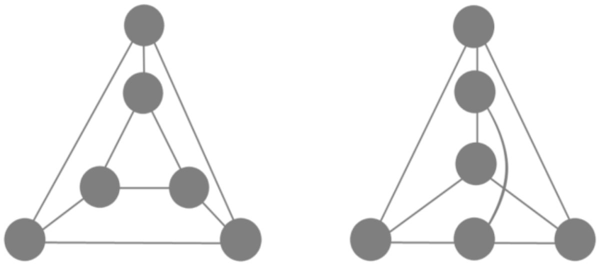
Сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу его ребер

СЛЕДСТВИЕ 1

Сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу его ребер

0 <= deg V <= p-1 для любой вершины V В (p, q) графе. Минимальная степень вершин графа G обозначается через **min deg G**, максимальная - через **max deg G**.

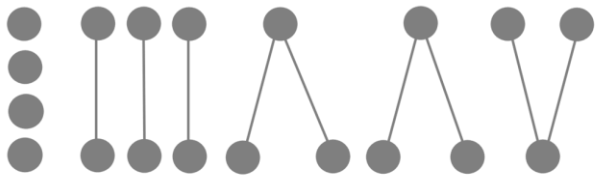
Если min deg G = max deg G = r, то все вершины имеют одинаковую степень и такой граф G называется **регулярным** (или **однородным**) **степени r**.
В этом случае говорят о степени графа и пишут **deg G = r**.
Регулярный граф степени 0 совсем не имеет ребер.
Если G - регулярный граф степени 1, то каждая его компонента содержит точно 1 ребро; в регулярном графе степени 2 каждая компонента - цикл и, верно обратное.
Кубические графы - регулярные графы, которые имеют степень 3.
На рисунке 2.10 показаны два регулярных графа с 6 вершинами.



Кубические графы с 6 вершинами

СЛЕДСТВИЕ 2

Каждый кубический граф имеет четное число вершин.
Полезно дать названия вершинам с малыми степенями.
Вершина V называется **изолированной**, если deg V = 0, и **концевой** (или висячей), если deg V = 1.



Граф с 10 компонентами

<u>Длина маршрута</u> равна количеству ребер в нем
Каждое ребро считается столько раз, сколько оно встречается в данном маршруте.
<u>Обхват графа</u> g(G) - длина кратчайшего простого цикла графа G (если он есть).
<u>Окружение графа</u> c(G) - длина самого длинного простого цикла графа G.
Эти понятия не определены в случае, когда в G нет циклов.
<u>Расстоянием</u> d(u, v) между двумя вершинами u и v графа G называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей их.
Если u и v не соединены, то полагаем d(u, v) = бесконечность.

В связном графе расстояние является *метрикой*, т.е. удовлетворяет следующим аксиомам:

АКСИОМЫ МЕТРИКИ

Для любых трех вершин u, v, w:

1) d(u, v) >= 0 и d(u, v) = 0 тогда и только тогда, когда u = v;
2) d(u, v) = d(v, u);
3) d(u, v) -|- d(v, w) >= d(u, w).

Кратчайшая простая (u-v)-цепь часто называется **геодезической.**

<u>Эксцентриситетом</u> e(v) вершины **v** называется наибольшее геодезическое расстояние между **v** и любой другой вершиной.

<u>Радиусом</u> **r** графа называется минимальный эксцентриситет любой вершины, или, формально, $r = \min_{v \in V} \epsilon(v)$.

<u>Диаметром</u> **d(G)** графа называется максимальный эксцентриситет любой вершины графа. Таким образом, **d**— это наибольшее расстояние между любыми парами вершин, или, в качестве альтернативы, $d = \max_{v \in V} \epsilon(v)$. Чтобы найти диаметр графа сначала находят кратчайшие пути между всеми парами вершин. Наибольшая длина любого из этих путей есть диаметр графа.

<u>Центральной вершиной</u> графа радиусом **r** называется вершина, эксцентриситет которой равен **r**. То есть вершина, на которой достигается радиус, или, что то же самое, вершина **v** для которой $\epsilon(v) = r$.

Периферийной вершиной графа диаметра **d** называется вершина, для которой расстояние равно **d** до некоторой другой вершины. То есть вершина, на которой достигается диаметр. Формально, **v** является периферийной, если $\epsilon(v) = d$.

Граф G на рис. 8 имеет:

- обхват g = 3,
- окружение c = 4,
- диаметр d = 2.

Квадрат G^2 графа G имеет то же множество вершин, что и граф G, т.е. $V(G^2) = V(G)$, и две вершины u и v в G^2 смежны тогда и только тогда, когда d(u, v) <= 2 в G.

Степени G^3, G^4 графа G определяются аналогично.

Дополнительные характеристики <u>связности</u> графов

Граф называется:

- **<u>связным</u>**, если для любых вершин u, v есть путь из u в v.
- **<u>сильно связным</u>** или **ориентированно связным**, если он ориентированный, и из любой вершины в любую другую имеется ориентированный путь.
- **<u>деревом</u>**, если он связный и не содержит нетривиальных циклов.
- **<u>полным</u>**, если любые его две (различные, если не допускаются петли) вершины соединены ребром.
- **<u>двудольным</u>**, если его вершины можно разбить на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 так, что всякое ребро соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2.
- **<u>k-дольным</u>**, если его вершины можно разбить на k непересекающихся подмножества V_1, V_2, …, V_k так, что не будет рёбер, соединяющих вершины одного и того же подмножества.
- **<u>полным двудольным</u>**, если каждая вершина одного подмножества соединена ребром с каждой вершиной другого подмножества.
- **<u>планарным</u>**, если граф можно изобразить диаграммой на плоскости без пересечений рёбер.

- **взвешенным**, если каждому ребру графа поставлено в соответствие некоторое число, называемое весом ребра.

Обходы графов

Начало теории графов связывают с задачей о кенигсбергских мостах. Эта знаменитая в свое время задача состоит в следующем. Семь мостов города Кенигсберга (ныне Калининграда) были расположены на реке Прегель так, как изображено на рисунке ниже.

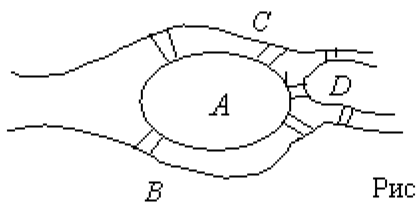
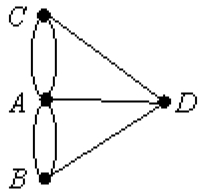
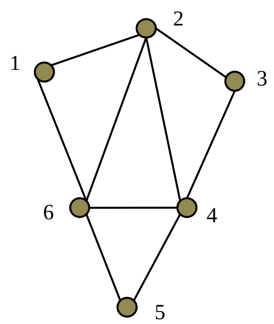


Рис. 30



Задача состоит в том, чтобы, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя только один раз по каждому мосту.

Так как в задаче существенны только переходы через мосты, план города можно свести к изображению графа (точнее, мультиграфа), в котором ребра соответствуют мостам, а вершины - различным разделенным частям города, которые обозначены буквами A, B, C, D (рис. 4.30, справа). Эйлер показал, что нельзя пройти по одному разу по всем кенигсбергским мостам и вернуться назад. В своей работе, опубликованной в 1736 году, он сформулировал и решил следующую общую проблему теории графов: при каких условиях связный граф содержит цикл, проходящий через каждое его ребро.



Цикл в графе называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа. Связный граф, в котором есть эйлеров цикл, называется *эйлеровым* графом. Такой граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

Например, граф, изображенный на рис. 4.31, является эйлеровым, поскольку он содержит эйлеров цикл 1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 2, 6, 1. В этом графе есть и другие эйлеровы циклы. Ясно, что любые два таких цикла отличаются друг от друга только порядком обхода ребер.

Теорема. **(Эйлера 1)** Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.

Цепь называется эйлеровой, если она содержит все ребра графа.

Теорема (Эйлера 2) Мультиграф обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он связен и число вершин нечетной степени равно 0 или 2.

В 1859 году известный ирландский математик У.Гамильтон предложил занимательную игру-головоломку «Кругосветное путешествие». Она состоит в следующем: каждой из двадцати вершин додекаэдра приписывается название одного из крупных городов мира. Нужно, переходя от одного города к другому по ребрам додекаэдра, посетить каждый город один раз (только один раз) и вернуться в город, с которого началось «путешествие». Эта задача сводится к отысканию в графе додекаэдра простого цикла, проходящего через каждую вершину этого графа.

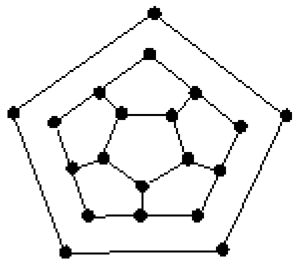


Рис. 4.32

Граф называется <u>гамильтоновым</u>, если он имеет простой цикл, содержащий все вершины графа. Простые циклы и простые цепи, включающие в себя все вершины графа, также называют <u>гамильтоновыми</u>. На рисунке ниже показаны примеры гамильтоновых циклов («жирные» линии) для двух простых графов.

Рис. 4.33

Классическая интерпретация задачи о гамильтоновых циклах - *<u>задача</u>* о *<u>шахматном коне</u>*: можно ли, начиная из произвольного поля на шахматной доске, ходить конем в такой последовательности, чтобы, пройдя через каждое из шестидесяти четырех полей доски, вернуться в исходное положение. Как практическую задачу, связанную с гамильтоновыми циклами, можно назвать известную *задачу о коммивояжере*: коммивояжер должен побывать в каждом из n городов по одному разу, выехав из одного из них и вернувшись в него же. При этом, зная расстояние между любыми двумя городами, надо определить кратчайший маршрут, то есть требуется найти в полном взвешенном графе гамильтонов цикл минимального веса.

Еще одна задача о применении гамильтоновых цепей. Есть станок, на котором должно быть выполнено n операций. Переход от выполнения одной операции к выполнению другой операции возможен только после переналадки станка. На переналадку станка для выполнения операции i после операции j необходимо .t_{ij} часа. Считается, что .$t_{ij}=t_{ji}$ Необходимо найти такой маршрут выполнения операций, чтобы время каждой переналадки не превосходило величины T. Данная задача сводится к задаче отыскания гамильтоновой цепи в графе, вершины которого представляют выполняемые операции, а ребра связывают только вершины (операции), требующие время переналадки менее T.

Несмотря на «похожесть» в определениях для эйлеровых и гамильтоновых циклов, соответствующие теории, устанавливающие критерии существования и алгоритмы поиска таких циклов, имеют мало общего. Терема Эйлера позволяет легко установить, является ли граф эйлеровым. Разработаны алгоритмы, позволяющие достаточно просто найти эйлеровы циклы эйлерова графа. Что касается гамильтоновых графов, то здесь положение дел существенно иное. Ответить на вопрос, является ли некий граф гамильтоновым, как правило, очень трудно. Общего критерия, подобного критерию Эйлера, здесь нет. Но, как оказалось, среди множества всех графов эйлеровых графов ничтожно мало, а вот гамильтоновых графов достаточно много.