

**Самостоятельная работа 3**  
по теме : «Вычисление интегралов»  
для студентов МБФ 1курс 2семестр специальность «биология»

**Теоретические сведения**

**Метод замены переменной**

Теорема. Пусть  $x = \varphi(t)$  монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

При этом, если  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(t) + C$ , то  $\int f(x)dx = F(\psi(x)) + C$ , где  $\psi(x)$  — функция, обратная  $\varphi(t)$ .

Данная формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

**Этапы замены переменной:**

- 1) Связать старую переменную интегрирования  $x$  с новой переменной  $t$  с помощью замены  $x = \varphi(t)$ .
- 2) Найти связь между дифференциалами  $dx = \varphi'(t)dt$ .
- 3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.
- 4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив  $t = \psi(x)$ .

**Метод интегрирования по частям**

Некоторые виды интегралов, вычисляются по частям

Если производные функций  $U = U(x)$  и  $V = V(x)$  непрерывны, то справедлива формула:

$$\int Udv = UV - \int vdu,$$

называемая формулой интегрирования по частям.

В качестве  $U(x)$  обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

## ВАРИАНТ 1

Вычислить неопределенные интегралы

1.  $\int x dx$
2.  $\int x^2 dx$
3.  $\int x^5 dx$
4.  $\int 2 dx$
5.  $\int 6x dx$
6.  $\int \frac{1}{3} t^3 dt$
7.  $\int (3 - x) dx$
8.  $\int (4x - x^2) dx$
9.  $\int 5(x - 2) dx$
10.  $\int (8x^3 + 4x - 7) dx$
11.  $\int x^2(1 + 3x) dx$
12.  $\int (x + 4)^2 dx$
13.  $\int 3(2x - 3)^2 dx$
14.  $\int x(3 - x)^2 dx$
15.  $\int 4\sqrt{x} dx$
16.  $\int \sqrt{x^2} dx$

Найти следующие определенные интегралы:

- 1)  $\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos x dx$  ; 2)  $\int_1^5 \frac{dx}{3x - 2}$  ; 3)  $\int_1^2 \frac{dt}{t^2 + 5t + 4}$  ;
- 4)  $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} dx$  ; 5)  $\int_0^2 \frac{x + 3}{x^2 + 4} dx$  ; 6)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$  .

## ВАРИАНТ 2

Вычислить неопределенные интегралы

1.  $\int x dx$
2.  $\int x^3 dx$
3.  $\int x^6 dx$
4.  $\int 3 dx$
5.  $\int 5x dx$
6.  $\int \frac{1}{3} t^3 dt$
7.  $\int (4 - x) dx$
8.  $\int (5x - x^2) dx$
9.  $\int 3(x - 3) dx$
10.  $\int (4x^3 + 8x - 2) dx$
11.  $\int x^2(1 + 4x) dx$
12.  $\int (x - 2)^2 dx$
13.  $\int 4(3x - 2)^2 dx$
14.  $\int x(5 - x)^2 dx$
15.  $\int 2\sqrt{x} dx$
16.  $\int \frac{dx}{x^2}$

Найти следующие определенные интегралы:

- 1)  $\int_0^5 \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1 + 3x}}$  ; 2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$  ; 3)  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3 + 1) dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$  ;
- 4)  $\int_1^7 \frac{dx}{1 + 9x^2}$  ; 5)  $\int_0^4 \left( 1 + e^{\frac{x}{4}} \right) dx$  ; 6)  $\int_{-1}^4 \frac{dt}{\sqrt{3t + 4}}$  .

### ВАРИАНТ 3

Вычислить неопределенные интегралы

1.  $\int 3x dx$
2.  $\int x^8 dx$
3.  $\int x^2 dx$
4.  $\int 4 dx$
5.  $\int 3x dx$
6.  $\int \frac{1}{3} t^3 dt$
7.  $\int (5 - x) dx$
8.  $\int \left[ 3x - \frac{1}{2} x^2 \right] dx$
9.  $\int 2(x - 2) dx$
10.  $\int (4x^3 + 2x - 5) dx$
11.  $\int x^2(1 + 5x) dx$
12.  $\int (x - 3)^2 dx$
13.  $\int 2(4x - 1)^2 dx$
14.  $\int x(3 - x)^2 dx$
15.  $\int 4\sqrt{x} dx$
16.  $\int \sqrt{x^3} dx$

Найти следующие определенные интегралы:

$$1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1 - 2 \cos x} dx \quad ; 2) \int_2^9 \frac{dt}{t^2 + 3t - 7} \quad ; 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3) \cdot \sin 2x dx \quad ;$$

$$4) \int_0^1 \frac{3x^2 dx}{\sqrt{3x^3 + 1}} \quad ; 5) \int_0^{\ln 5} \sqrt{e^x - 1} e^x dx \quad ; 6) \int_1^5 \frac{x^5 + 7x^4 + x^3 - 5x^2 - 2}{x^3 + x} dx \quad .$$

## ВАРИАНТ 4

Вычислить неопределенные интегралы

1.  $\int 5x dx$
2.  $\int x^9 dx$
3.  $\int x^3 dx$
4.  $\int 6 dx$
5.  $\int 4x dx$
6.  $\int \frac{1}{3} t^3 dt$
7.  $\int (6 - x) dx$
8.  $\int (2x - x^2) dx$
9.  $\int 3(x - 5) dx$
10.  $\int (2x^3 + 2x - 3) dx$
11.  $\int x^2(1 + 6x) dx$
12.  $\int (3 - x)^2 dx$
13.  $\int 6(2x - 3)^2 dx$
14.  $\int x(2 - x)^2 dx$
15.  $\int 2\sqrt{x} dx$
16.  $\int \sqrt{x^2} dx$

Найти следующие определенные интегралы:

$$1) \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}; \quad 2) \int_1^e \frac{\sqrt[4]{1 + \ln x}}{x} dx; \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx;$$

$$4) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln x}; \quad 5) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}; \quad 6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} dx.$$

## ВАРИАНТ 5

Вычислить неопределенные интегралы

1.  $\int 3x dx$
2.  $\int x^9 dx$
3.  $\int x^7 dx$
4.  $\int 8 dx$
5.  $\int 3x dx$
6.  $\int \frac{1}{2} t^3 dt$
7.  $\int (5 - x) dx$
8.  $\int (3x - x^2) dx$
9.  $\int 5(x - 4) dx$
10.  $\int (6x^3 + 4x - 7) dx$
11.  $\int x^2(1 - 6x) dx$
12.  $\int (x + 1)^2 dx$
13.  $\int 4(2x - 3)^2 dx$
14.  $\int x(5 - x)^2 dx$
15.  $\int 6\sqrt{x} dx$
16.  $\int \sqrt{x^4} dx$

Найти следующие определенные интегралы:

- 1)  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$  ; 2)  $\int_0^{\ln 3} \sqrt{e^x + 1} \cdot e^x dx$  ; 3)  $\int_{-3}^3 x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2} dx$  ;
- 4)  $\int_2^8 \frac{x^5 - 2x^4 - x^2 + 5x^2 + 8}{x^2 + x} dx$  ; 5)  $\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6 - x}} dx$  ; 6)  $\int_0^2 \frac{x dx}{x^2 - 5}$  .

## ВАРИАНТ 6

Вычислить неопределенные интегралы

1.  $\int 3x dx$
2.  $\int x^4 dx$
3.  $\int x^9 dx$
4.  $\int 8 dx$
5.  $\int 6x dx$
6.  $\int \frac{1}{4} t^3 dt$
7.  $\int (2 - x) dx$
8.  $\int (3x - x^2) dx$
9.  $\int 3(x - 2) dx$
10.  $\int (7x^3 + 8x - 2) dx$
11.  $\int x^2(1 + 2x) dx$
12.  $\int (x + 3)^2 dx$
13.  $\int x(3x - 2)^2 dx$
14.  $\int 2x(5 - x)^2 dx$
15.  $\int 9\sqrt{x} dx$
16.  $\int \frac{dx}{x^2}$

Найти следующие определенные интегралы:

$$1) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 x}{1 - \operatorname{ctg} x} dx \quad ; 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \quad ; 3) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^3}} ;$$

$$4) \int_0^2 \left( 1 - e^{\frac{x}{2}} + 3x^2 \right) dx \quad ; 5) \int_0^1 x\sqrt{1 + x^2} dx \quad ; 6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(6x + 1) dx .$$

## ВАРИАНТ 7

Вычислить неопределенные интегралы

9.  $\int x dx$

10.  $\int x^2 dx$

11.  $\int x^5 dx$

12.  $\int 2 dx$

13.  $\int 6x dx$

14.  $\int_3^1 t^3 dt$

15.  $\int (3 - x) dx$

16.  $\int (4x - x^2) dx$

17.  $\int 5(x - 2) dx$

18.  $\int (8x^3 + 4x - 7) dx$

19.  $\int x^2(1 + 3x) dx$

20.  $\int (x + 4)^2 dx$

21.  $\int 3(2x - 3)^2 dx$

22.  $\int x(3 - x)^2 dx$

23.  $\int 4\sqrt{x} dx$

24.  $\int \sqrt{x^2} dx$

Найти следующие определенные интегралы:

1)  $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^4}$  ; 2)  $\int_1^7 \frac{x^3 - 3x^4 - x^3 - 2x^2 + 5}{x^3 + x} dx$  ; 3)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg} t} dt$  ;

4)  $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{3 - 7x + x^2}}$  ; 5)  $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$  ; 6)  $\int_1^4 \frac{dt}{t^2 + 5t - 4}$  .



## ВАРИАНТ 8

Вычислить неопределенные интегралы

9.  $\int x dx$

10.  $\int x^3 dx$

11.  $\int x^6 dx$

12.  $\int 3 dx$

13.  $\int 5x dx$

14.  $\int \frac{1}{3} t^3 dt$

15.  $\int (4 - x) dx$

16.  $\int (5x - x^2) dx$

17.  $\int 3(x - 3) dx$

18.  $\int (4x^3 + 8x - 2) dx$

19.  $\int x^2(1 + 4x) dx$

20.  $\int (x - 2)^2 dx$

21.  $\int 4(3x - 2)^2 dx$

22.  $\int x(5 - x)^2 dx$

23.  $\int 2\sqrt{x} dx$

24.  $\int \frac{dx}{x^2}$

Найти следующие определенные интегралы:

1)  $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$  ; 2)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1} dx$  ; 3)  $\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 10} dx$  ;

4)  $\int_0^8 \frac{dx}{(x+1) \cdot x}$  ; 5)  $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}$  ; 6)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$

## ВАРИАНТ 9

Вычислить неопределенные интегралы

9.  $\int 3x dx$

10.  $\int x^8 dx$

11.  $\int x^2 dx$

12.  $\int 4 dx$

13.  $\int 3x dx$

14.  $\int \frac{1}{3} t^3 dt$

15.  $\int (5 - x) dx$

16.  $\int \left[ 3x - \frac{1}{2} x^2 \right] dx$

17.  $\int 2(x - 2) dx$

18.  $\int (4x^3 + 2x - 5) dx$

19.  $\int x^2(1 + 5x) dx$

20.  $\int (x - 3)^2 dx$

21.  $\int 2(4x - 1)^2 dx$

22.  $\int x(3 - x)^2 dx$

23.  $\int 4\sqrt{x} dx$

24.  $\int \sqrt{x^3} dx$

Найти следующие определенные интегралы:

1)  $\int_1^5 \frac{3x \cdot dx}{5x + 9}$  ; 2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx$  ; 3)  $\int_1^6 \frac{x^5 - 3x^4 + x^2 + 5x^2 + 7}{x^2 + x} dx$  ;

4)  $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$  ; 5)  $\int_{\ln 3}^0 \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx$  ; 6)  $\int \sin^3 n \cdot \sqrt{\cos n} dn$

## ВАРИАНТ 10

Вычислить неопределенные интегралы

9.  $\int 5x dx$

10.  $\int x^9 dx$

11.  $\int x^3 dx$

12.  $\int 6 dx$

13.  $\int 4x dx$

14.  $\int \frac{1}{3} t^3 dt$

15.  $\int (6 - x) dx$

16.  $\int (2x - x^2) dx$

17.  $\int 3(x - 5) dx$

18.  $\int (2x^3 + 2x - 3) dx$

19.  $\int x^2(1 + 6x) dx$

20.  $\int (3 - x)^2 dx$

21.  $\int 6(2x - 3)^2 dx$

22.  $\int x(2 - x)^2 dx$

23.  $\int 2\sqrt{x} dx$

24.  $\int \sqrt{x^2} dx$

Найти следующие определенные интегралы:

1)  $\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 10} dx$  ; 2)  $\int_0^2 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$  ; 3)  $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 - 13}}$  ;

4)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} dx$  ; 5)  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}$  ; 6)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1} dx$

## ВАРИАНТ 11

Вычислить неопределенные интегралы

9.  $\int 3x dx$

10.  $\int x^9 dx$

11.  $\int x^7 dx$

12.  $\int 8 dx$

13.  $\int 3x dx$

14.  $\int \frac{1}{2} t^3 dt$

15.  $\int (5 - x) dx$

16.  $\int (3x - x^2) dx$

17.  $\int 5(x - 4) dx$

18.  $\int (6x^3 + 4x - 7) dx$

19.  $\int x^2(1 - 6x) dx$

20.  $\int (x + 1)^2 dx$

21.  $\int 4(2x - 3)^2 dx$

22.  $\int x(5 - x)^2 dx$

23.  $\int 6\sqrt{x} dx$

24.  $\int \sqrt{x^4} dx$

Найти следующие определенные интегралы:

1)  $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^4}$  ; 2)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1 - 2 \cos x} dx$  ; 3)  $\int_{-3}^3 x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2} dx$  ;

4)  $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$  ; 5)  $\int_0^{\ln 5} \sqrt{e^x - 1} e^x dx$  ; 6)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} dx$  .

ВАРИАНТ 12

Вычислить неопределенные интегралы

9.  $\int 3x dx$

10.  $\int x^4 dx$

11.  $\int x^9 dx$

12.  $\int 8 dx$

13.  $\int 6x dx$

14.  $\int \frac{1}{4} t^3 dt$

15.  $\int (2 - x) dx$

16.  $\int (3x - x^2) dx$

17.  $\int 3(x - 2) dx$

18.  $\int (7x^3 + 8x - 2) dx$

19.  $\int x^2(1 + 2x) dx$

20.  $\int (x + 3)^2 dx$

21.  $\int x(3x - 2)^2 dx$

22.  $\int 2x(5 - x)^2 dx$

23.  $\int 9\sqrt{x} dx$

24.  $\int \frac{dx}{x^2}$

Найти следующие определенные интегралы:

1)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 x}{1 - \operatorname{ctg} x} dx$  ; 2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$  ; 3)  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^3}}$  ;

4)  $\int_0^2 \left( 1 - e^{\frac{x}{2}} + 3x^2 \right) dx$  ; 5)  $\int_0^1 x\sqrt{1 + x^2} dx$  ; 6)  $\int_2^9 \frac{dt}{t^2 + 3t - 7}$  .

## ВАРИАНТ 13

Вычислить неопределенные интегралы

17.  $\int 3x dx$

18.  $\int x^8 dx$

19.  $\int x^2 dx$

20.  $\int 4 dx$

21.  $\int 3x dx$

22.  $\int \frac{1}{3} t^3 dt$

23.  $\int (5 - x) dx$

24.  $\int \left( 3x - \frac{1}{2} x^2 \right) dx$

25.  $\int 2(x - 2) dx$

26.  $\int (4x^3 + 2x - 5) dx$

27.  $\int x^2(1 + 5x) dx$

28.  $\int (x - 3)^2 dx$

29.  $\int 2(4x - 1)^2 dx$

30.  $\int x(3 - x)^2 dx$

31.  $\int 4\sqrt{x} dx$

32.  $\int \sqrt{x^3} dx$

Найти следующие определенные интегралы:

1)  $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^4}$  ; 2)  $\int_1^7 \frac{x^3 - 3x^4 - x^3 - 2x^2 + 5}{x^3 + x} dx$  ; 3)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg} t} dt$  ;

4)  $\int_{-3}^{-1} \sqrt{3 - 7x + x^2} dx$  ; 5)  $\int_2^9 \frac{dt}{t^2 + 3t - 7}$  ; 6)  $\int_1^4 \frac{dt}{t^2 + 5t - 4}$  .

## ВАРИАНТ 14

Вычислить неопределенные интегралы

17.  $\int 5x dx$

18.  $\int x^9 dx$

19.  $\int x^3 dx$

20.  $\int 6 dx$

21.  $\int 4x dx$

22.  $\int_3^1 t^3 dt$

23.  $\int (6 - x) dx$

24.  $\int (2x - x^2) dx$

25.  $\int 3(x - 5) dx$

26.  $\int (2x^3 + 2x - 3) dx$

27.  $\int x^2(1 + 6x) dx$

28.  $\int (3 - x)^2 dx$

29.  $\int 6(2x - 3)^2 dx$

30.  $\int x(2 - x)^2 dx$

31.  $\int 2\sqrt{x} dx$

32.  $\int \sqrt{x^2} dx$

Найти следующие определенные интегралы:

1)  $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$  ; 2)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1} dx$  ; 3)  $\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 10} dx$  ;

4)  $\int_0^8 \frac{dx}{(x+1) \cdot x}$  ; 5)  $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}$  ; 6)  $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$  , .

## ВАРИАНТ 15

Вычислить неопределенные интегралы

17.  $\int 3x dx$

18.  $\int x^9 dx$

19.  $\int x^7 dx$

20.  $\int 8 dx$

21.  $\int 3x dx$

22.  $\int \frac{1}{2} t^3 dt$

23.  $\int (5 - x) dx$

24.  $\int (3x - x^2) dx$

25.  $\int 5(x - 4) dx$

26.  $\int (6x^3 + 4x - 7) dx$

27.  $\int x^2(1 - 6x) dx$

28.  $\int (x + 1)^2 dx$

29.  $\int 4(2x - 3)^2 dx$

30.  $\int x(5 - x)^2 dx$

31.  $\int 6\sqrt{x} dx$

32.  $\int \sqrt{x^4} dx$

Найти следующие определенные интегралы:

1)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1 - 2 \cos x} dx$  ; 2)  $\int_2^9 \frac{dt}{t^2 + 3t - 7}$  ; 3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3) \cdot \sin 2x dx$  ;

4)  $\int_0^1 \frac{3x^2 dx}{\sqrt{3x^3 + 1}}$  ; 5)  $\int_0^{\ln 5} \sqrt{e^x - 1} e^x dx$  ; 6)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} dx$  .