Элементы теории пределов

ВЫЧИСЛЯЯ ПРЕДЕЛЫ, СЛЕДУЕТ ЗНАТЬ:

– основные теоремы о пределах:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},(\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\neq 0)$

В частности, если $f(x)=C,$ где $C=const$, то 4) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=C$ 5) $\lim\limits_{x\to a}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$

– таблицу простейших пределов ($a>0, C\neq 0$):

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{C}{x}=\infty$	2) $\lim\limits_{x\to\infty}C\cdot x=\infty$	3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{C}=\infty$	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{C}{x}=0$
5) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}\infty, a<1\\ 0, a>1\end{cases}$	6) $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}0, a<1\\ \infty, a>1\end{cases}$	7) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$	8) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$

– таблицу эквивалентных бесконечно малых:

$\sin x\sim x;$ $tgx\sim x;$ $arctgx\sim x;$ $\arcsin x\sim x$
$\ln(1+x)\sim x;$ $\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}, a>0,$ $a\neq 1$
$e^x-1\sim x;$ $a^x-1\sim x\ln a, a>0$
$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n},$ $(1+x)^r-1\sim x^r, r\in R$ $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

Предел отношения бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$, если $f(x)\sim f_1(x), \varphi(x)=\varphi_1(x)$,

и иметь в виду, что предел элементарной функции в точке её определения равен частному значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Нарушение ограничений, налагаемых на функции при вычислении их пределов, приводит к неопределённостям вида: $(+\infty)\cdot(-\infty),$ $\infty\cdot 0,$ $0/0,$ $\infty/\infty,$ $1^\infty,$ $0^0,$ $\infty^0,$ $\infty-\infty.$

Элементарными приёмами раскрытия неопределённостей являются:

1) сокращение на множитель, создающий неопределённость (при разрешении неопределённости $\frac{0}{0}$) ;

2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (в отношении многочленов при $x \to \infty$);

3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших;

4) использование двух замечательных пределов:

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x} = 1 \end{cases}$ – 1-й замечательный предел. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \\ \lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e \end{cases}$ – 2-й замечательный предел.

Кроме того, с учетом первого и второго замечательного пределов можно доказать, что: $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$; $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$.

Справочные материалы 2

Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы (разности) двух чисел $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Куб суммы (разности) двух чисел $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Разность квадратов двух чисел $a^2 - b^2 = (a - b(a + b)$

Сумма (разность) кубов двух чисел $a^3 \pm b^3 = (a \pm b(a^2 \mp ab + b^2)$

Разложение квадратного трехчлена на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

где x_1, x_2 – корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$,

которые находятся по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.