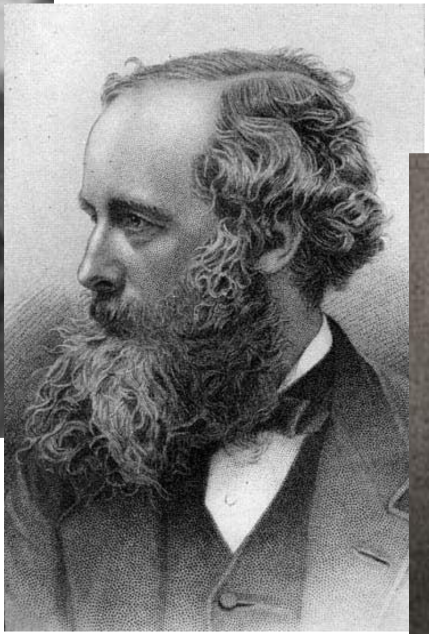
Лекция
Тема: **«Циркуляция и ротор векторного поля»**

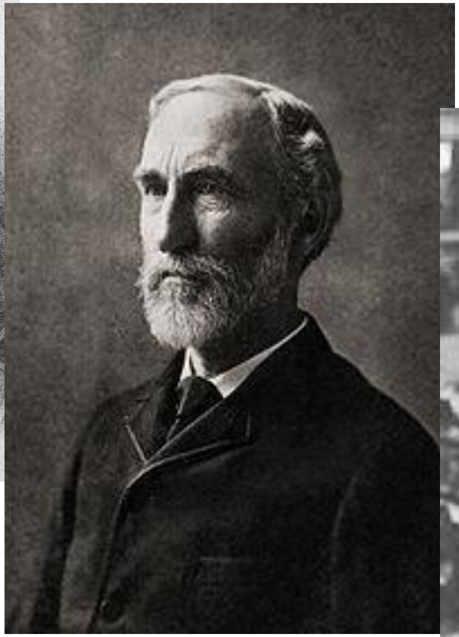
Майкл Фарадей (1791-1867)

Джеймс Клерк Максвелл (1831 – 1874)

Джозайя Уиллард Гиббс (1839-1903)

Оливер Хевисайд (1850 – 1925)





Что нужно знать и уметь?

1) Свойства и вычисление определённых интегралов
2) Криволинейные интегралы первого и второго рода и их вычисление
3) Уравнение прямой (разные случаи)
4) Векторное произведение векторов
5) Дифференцирование функции многих переменных
6) Вычисление определителей третьего порядка методом разложения по первой строке

План

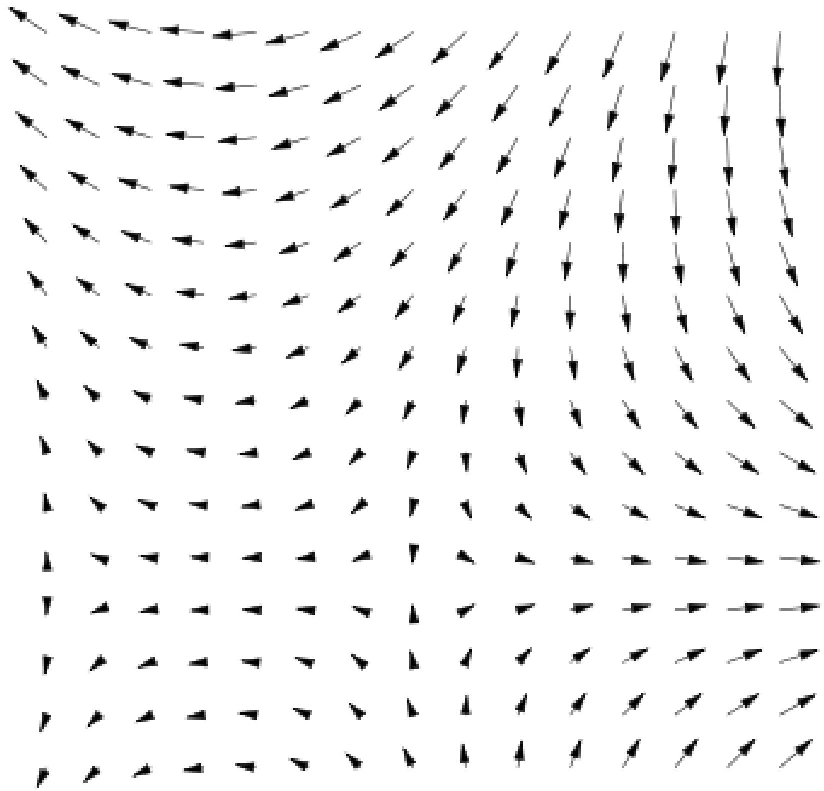
1. **Циркуляция ВП. Решение типовой задачи**
2. **Ротор ВП. Решение типовой задачи**
3. **Формула Стокса. Решение типовой задачи**

- ЦИРКУЛЯЦИЯ…
- Происходит от латинского ***circulatio*** - «вращение, круговорот»
- **Циркуляция в теплотехнике** — движение теплоносителя по замкнутому контуру в котлах, системах отопления
- **Циркуляция в мореходстве** — движение плавсредства по круговой (или близкой к ней) траектории (см. также Диаметр циркуляции)

- Кише́чно-печёночная **циркуля́ция жёлчных кисло́т -** циклическое обращение жёлчных кислот в пищеварительном тракте, при котором они синтезируются печенью, выводятся в составе жёлчи в двенадцатиперстную кишку, реабсорбируются в кишечнике, транспортируются кровотоком к печени и повторно используются при секреции жёлчи.

- Термин «циркуляция» был первоначально введен в ***гидродинамике*** для расчета движения жидкости по замкнутому каналу.

Векторное поле — это отображение, которое **каждой точке** рассматриваемого пространства ставит в соответствие вектор с началом в этой точке.
Например, вектор скорости ветра в данный момент времени изменяется от точки к точке и может быть описан векторным полем.



Характеристики векторных полей

- 1) силовые линии
- 2) поток векторного поля
- 3) дивергенция векторного поля

Поток вектора и дивергенция – характеристики интенсивности поля

<u>Определение</u>

Циркуляцией Ц векторного поля

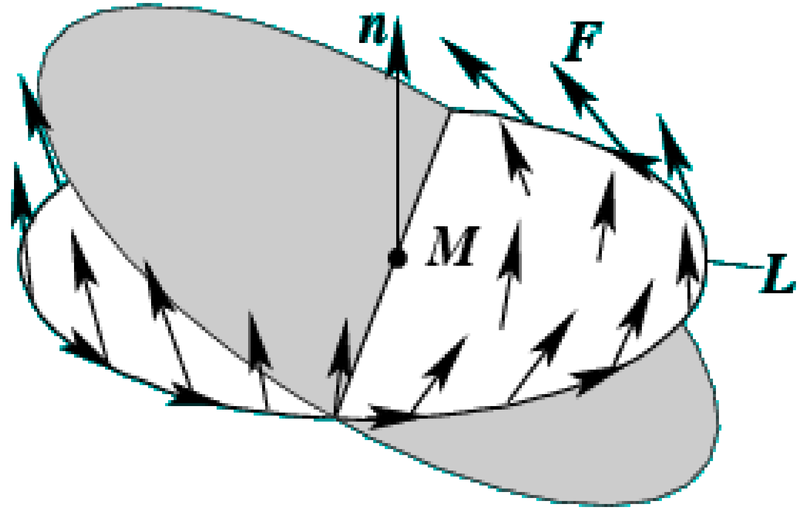
$$\overline{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

вдоль контура L называется криволинейный интеграл по замкнутому пути L от скалярного произведения векторов $\overline{F}(M)$ и $d\vec{l}$:

$$Ц = \oint_L \overline{F}(M) \cdot d\vec{l} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

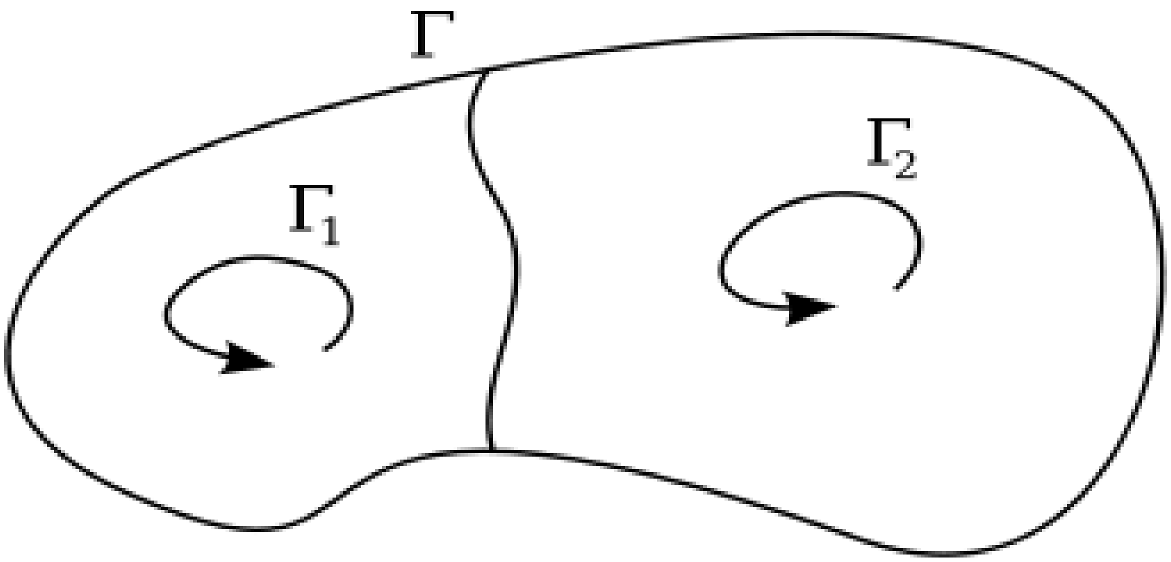
Физическая интерпретация

- Если **F** — некоторое **силовое поле**, тогда циркуляция этого поля по некоторому произвольному контуру **L** есть **работа** этого поля при перемещении точки вдоль контура **L**



Свойства циркуляции

- Свойство аддитивности циркуляции: циркуляция по контуру **Γ** есть сумма циркуляций по контурам **Γ**1 и **Γ**2, то есть



Пример 1.

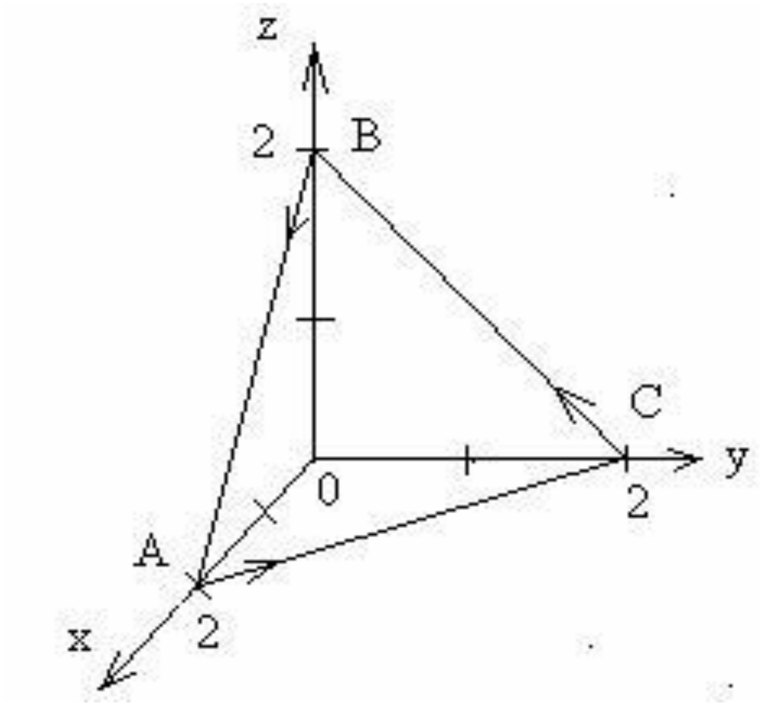
Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\overline{F}(x,y,z) = -x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$$

вдоль треугольника ***ABC в*** положительном направлении.

Координаты точек равны:

$$A(2;0;0),\quad B(0;2;0),\quad C(0;0;2)$$



- ***ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ***

называется обход против часовой стрелки – когда для «идущего по контуру» человека *ограниченная контуром область* остаётся по левую руку.

- Используем формулу

$$Ц = \oint\limits_{ABCA} \overline{F}(M)\cdot d\vec{l} = \oint\limits_{ABCA} Pdx + Qdy + Rdz$$

- В силу аддитивности циркуляции имеем:

$$Ц = \oint\limits_{ABCA} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA}$$

- Согласно условию: $P(x, y, z) = -x$

$$Q(x, y, z) = 2y$$

$$R(x, y, z) = -z$$

1) Вычислим интеграл $\int\limits_{AB}$

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{AB} -xdx + 2ydy - zdz$$

Найдём уравнение ***AB*** как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

Прямая ***AB*** лежит в плоскости ***XOY*.**

Подставим координаты точек в уравнение

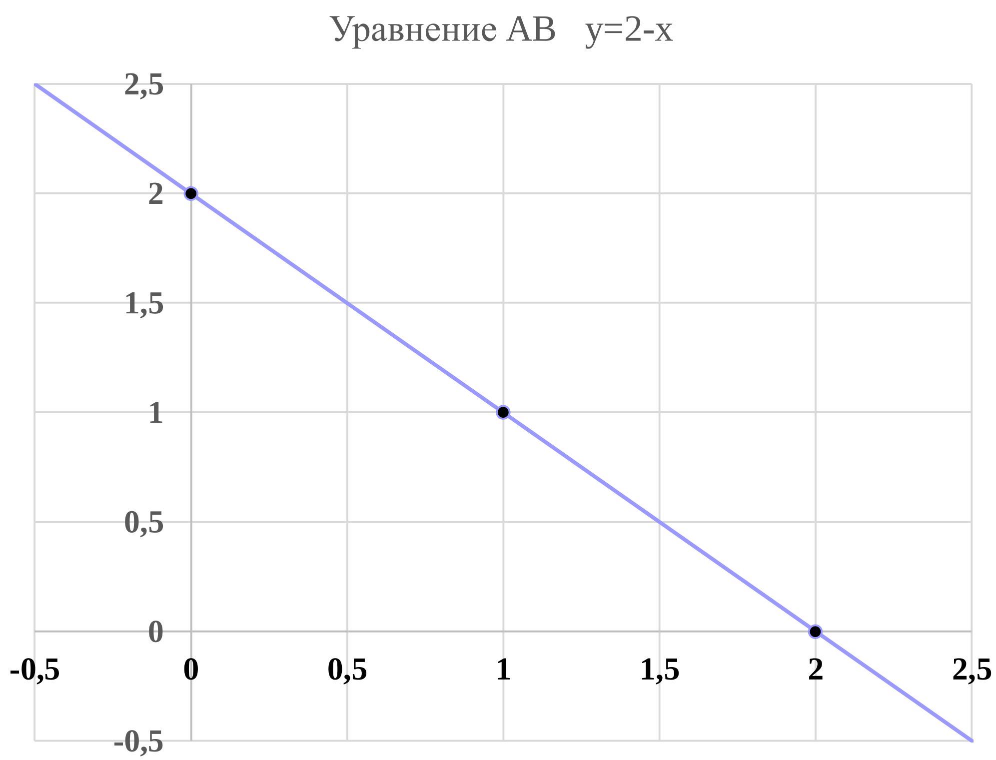
$$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y}{2}$$

$$y=2-x$$

$$dy=-dx$$

Перейдём к обыкновенному интегралу по переменной ***x***:

Замечание



- Уравнение ***AB*** можно найти из уравнения прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Согласно условию

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$$

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{AB} -xdx + 2ydy - zdz =$$

$$= \int_2^0 -xdx + 2(2-x)(-dx) =$$

$$= \int\limits_0^2 xdx + 2\int\limits_0^2 (2-x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\left(2-x\right)^2\Big|_0^2 = 2+4=6$$

2) Аналогично вычислим интеграл $\int\limits_{BC}$

Прямая ***BC*** находится в плоскости ***Y0Z, т.е. x=0***

И от интеграла $\int\limits_{BC} = \int\limits_{BC} Pdx + Qdy + Rdz$

у нас остаётся

$$\int\limits_{BC} = \int\limits_{BC} 2ydy - zdz$$

Очевидно, что уравнение ***BC имеет вид:***

$$\frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$$

Перейдём к обыкновенному интегралу по переменной ***y***:

$$\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$$

$$z=2-y$$

$$dz=-dy$$

$$y\in[2;0]$$

$$\int\limits_{BC} \ = \int\limits_{BC} 2ydy - zdz = \int\limits_{2}^{0} 2ydy - (2-y)\cdot(-dy) = \int\limits_{2}^{0} 2ydy + (2-y)dy =$$

$$= \int\limits_{2}^{0} (y+2)dy = \frac{1}{2}(y+2)^2\Big|_2^0 = \frac{1}{2}\left(2^2-4^2\right) = -6$$

3) По такой же схеме вычисляем интеграл $\int\limits_{CA}$

Прямая ***CA*** находится в плоскости ***X0Z, т.е. y=0***

И от интеграла $\int\limits_{CA} = \int\limits_{CA} Pdx + Qdy + Rdz$

у нас остаётся

$$\int\limits_{CA} = \int\limits_{CA} Pdx + Rdz$$

$$\int\limits_{CA} = \int\limits_{CA} -xdx - zdz$$

Очевидно, что уравнение ***CA имеет вид:***

$$\frac{x}{2} + \frac{z}{2} = 1$$

Перейдём к обыкновенному интегралу по переменной ***x***:

$$\frac{x}{2}+\frac{z}{2}=1$$

$$z=2-x$$

$$dz=-dx$$

$$x\in\left[0;2\right]$$

$$\int\limits_{CA} = \int\limits_{CA} -xdx - zdz = \int\limits_0^2 -xdx - (2-x)\cdot(-dx) =$$

$$= \int\limits_0^2 -xdx + (2-x)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 2(1-x)dx = 2\int\limits_0^2 (1-x)dx =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2}(1-x)^2\Big|_0^2 = (1-x)^2\Big|_2^0 = 0$$

Ответ:

- Циркуляция векторного поля

$$\overline{F}(x,y,z) = -x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$$

по замкнутому контуру ***ABCA*** равна

$$Ц = \oint_{ABCA} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$$

$$Ц = \oint_{ABCA} = 6 - 6 + 0 = 0$$

Ротор векторного поля

Определение

Ротором (вихрем) векторного поля

$$\overline{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

называется вектор:

$$rot\overline{F}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

или

$$rot\overline{F}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

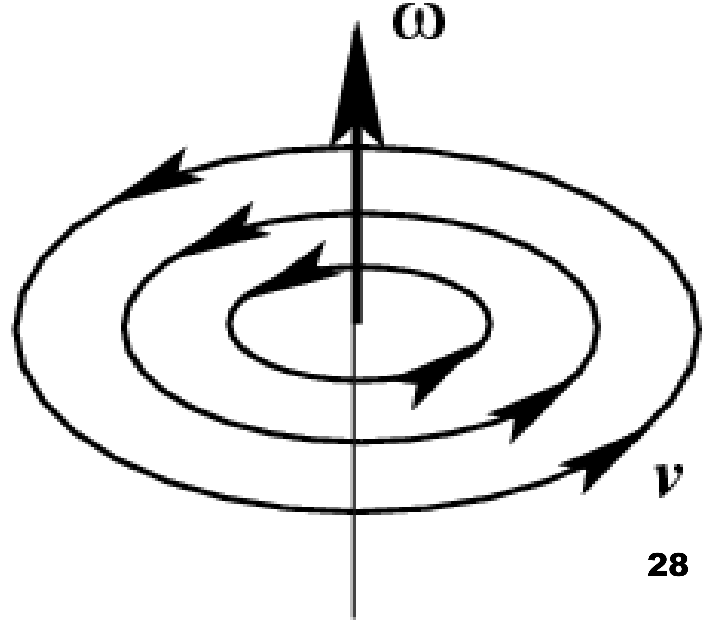
- Функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

Физический смысл:

- если $\overline{F}(M)$- поле скоростей твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, то с точностью до числового множителя ротор векторного поля представляет собой мгновенную угловую скорость этого

вращения

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{a}(M)$$



Дополнение

- Ротор, ротация или вихрь — векторный дифференциальный оператор над векторным полем.

Обозначается разными способами:

• *rot* - наиболее распространено в русскоязычной литературе

• *curl* - (в англоязычной литературе, предложено Максвеллом

- $\nabla\times$ - как дифференциальный оператор набла, векторно умножаемый на векторное поле, то есть для векторного поля $\boldsymbol{F}$ результат действия оператора ротора, записанного в таком виде, будет векторным произведением оператора набла и этого поля: $\nabla\times\overline{F}$

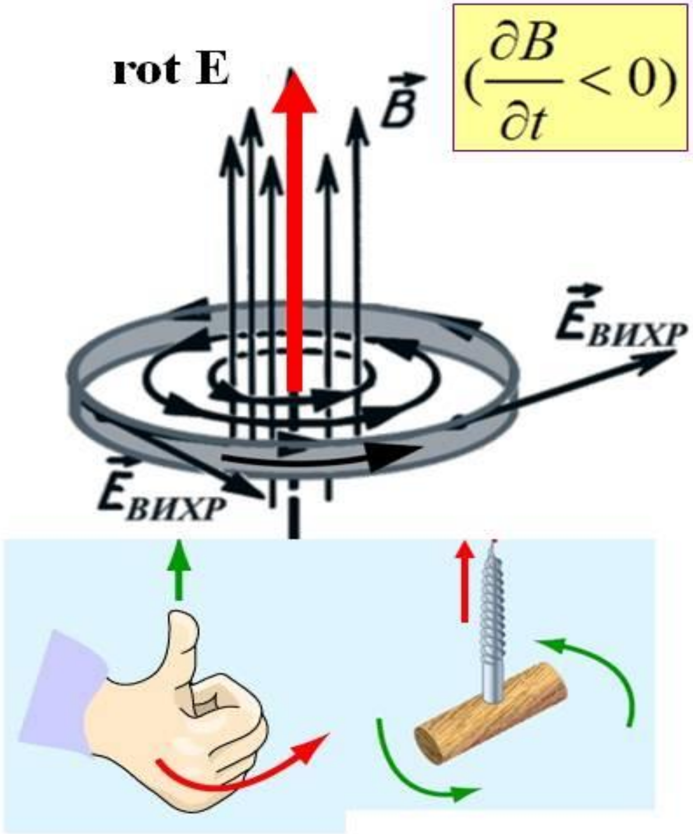
- Поле ***rot F*** (длина и направление вектора *rot**F*** в каждой точке пространства) характеризует в некотором смысле ***вращательную составляющую*** поля **F** в соответствующих точках.

Ротор $rot\,\vec{E}$ направлен по правилу Ленца. В случае, когда магнитное поле усиливается , ротор направлен против вектора В. Если магнитное поле убывает – **сонаправлен** с вектором В.

Вектор напряженности электрического поля Е связан с ротором $rot\,\vec{E}$ правилом правого буравчика, следовательно, можно определить направление поля Е.

В среде, не проводящей электрический ток, $rot\,\vec{E}$ индуцированного электрического поля прямо пропорционален скорости изменения В:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$



- Результат действия оператора ротора на конкретное векторное поле ***F*** называется ротором поля ***F*** или просто ротором ***F*** и представляет собой новое векторное поле:

$$rot\overline{F} = \nabla \times \overline{F}$$

Пример 2

- Найти ротор векторного поля

$$\overline{F}(M) = 4z\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + z)\vec{k}$$

Решение

Согласно условию

$$P = 4z$$

$$Q = x - y - z$$

$$R = 3y + z$$

- Используем формулу

$$rot\overline{F}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

- Согласно условию имеем

$$rot\overline{F}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 4z & (x-y-z) & (3y+z)\end{vmatrix}$$

Вычислим определитель методом разложения по первой строке

$$rot\overline{F}(M)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4z & (x-y-z) & (3y+z) \end{vmatrix}=$$

$$=\left((3y+z)'_y-(x-y-z)'_z\right)\bar{i}-\left((3y+z)'_x-(4z)'_z\right)\bar{j}+$$

$$+\left((x-y-z)'_x-(4z)'_y\right)\bar{k}=$$

$$=4\bar{i}+4\bar{j}+\bar{k}$$

Формула Стокса в координатной форме:

Пусть S- замкнутая гладкая ориентируемая поверхность, а L - замкнутая гладкая кривая, являющаяся границей поверхности S.

Пусть $\bar{n} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k}$

- единичная нормаль к поверхности S, задающая одну из её сторон.

Направление обхода контура L выбрано против часовой стрелки (т.е. является положительным)

Пусть векторное поле

$$\bar{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

непрерывно и дифференцируемо на S и L, тогда:

$$\oint Pdx + Qdy + Rdz = \begin{cases} = \iint\limits_S [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma]dS \\ = \iint\limits_S (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dxdz + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy \end{cases}$$

Формула Стокса в векторной форме:

Циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность S , ограниченную контуром L:

$$\oint_L F(M)\cdot d\vec{l} = \iint_S (rotF(M)\cdot\vec{n})dS$$

Замечание

В случае, если контур плоский, например лежит в плоскости OXY, справедлива теорема (формула) Грина

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

где S — плоскость, ограничиваемая контуром L (внутренность контура).

Джордж Габриель Стокс

(13 августа 1819 — 1 февраля 1903)

- Сэр Джордж Габриель Стокс — английский математик, механик и физик-теоретик ирландского происхождения. Работал в Кембриджском университете, внёс значительный вклад в гидро- и газодинамику, оптику и математическую физику.

Пример 3.

Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\overline{F}(x,y,z)=(x-2z)\vec{i}+(x+3y+z)\vec{j}+(5x+y)\vec{k}$$

вдоль треугольника ***ABC в*** положительном направлении по **формуле Стокса**

Координаты точек равны:

$$A(2;0;0),\quad B(0;2;0),\quad C(0;0;2)$$

Решение

- Согласно условию

$$P(x,y,z)=x-2z$$

$$Q(x,y,z)=x+3y+z$$

$$R(x,y,z)=5x+y$$

- Используем формулу

$$\oint_L F(M)\cdot d\vec{l}=\iint_S (rotF(M)\cdot\vec{n})dS$$

- Найдём $rot\overline{F}(M)$ по формуле

$$rot\overline{F}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

- Найдём частные производные функций

$$P(x, y, z) = x - 2z$$

$$Q(x, y, z) = x + 3y + z$$

$$R(x, y, z) = 5x + y$$

$$P'_z = (x - 2z)'_z = -2$$
$$Q'_z = (x + 3y + z)'_z = 1$$
$$R'_y = (5x + y)'_y = 1$$

$$P'_y = (x - 2z)'_z = 0$$

$$Q'_x = (x + 3y + z)'_x = 1$$

$$R'_x = (5x + y)'_x = 5$$

- Подставим их значения в формулу ротора

$$rot\overline{F}(M) = (1-1)\vec{i} + (-2-5)\vec{j} + (1-0)\vec{k}$$

$$rot\overline{F}(M) = -7\vec{j} + \vec{k}$$

$$Ц = \oint\limits_L F(M)\cdot d\vec{l} = \iint\limits_S (rotF(M)\cdot\vec{n})dS$$

$$Ц = \iint\limits_S (rotF(M)\cdot\vec{n})ds =$$

$$= \iint\limits_{AOC} (rot\overline{F})_x dydz + \iint\limits_{AOB} (rot\overline{F})_y dxdz + \iint\limits_{COB} (rot\overline{F})_z dxdy$$

- Так как $rot\overline{F}(M) = -7\vec{j} + \vec{k}$, то

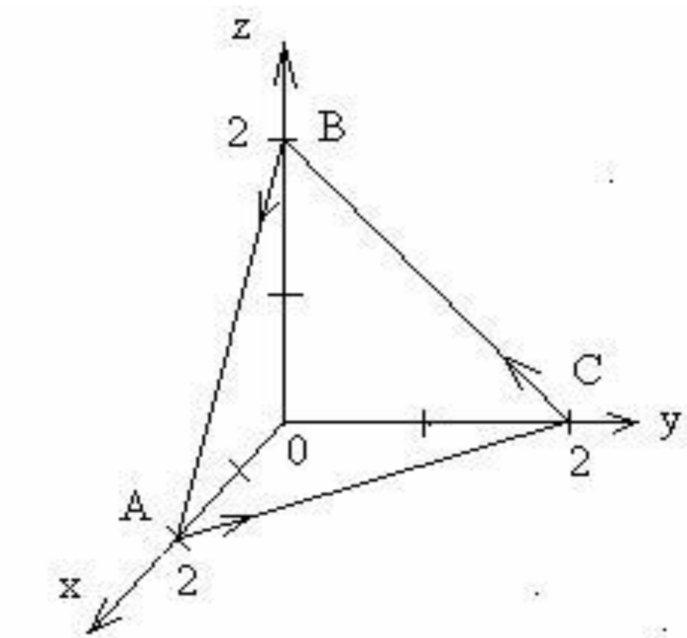
$$(rot\overline{F})_x = 0$$

$$(rot\overline{F})_y = -7$$

$$(rot\overline{F})_z = 1$$

$$Ц = -7\iint\limits_{AOB} dxdz + \iint\limits_{COB} dxdy$$

- Согласно геометрическому смыслу двойного интеграла



$$\iint\limits_{AOB} dxdz = \iint\limits_{COB} dxdy = 2$$

Ответ:

$$Ц = -7\iint\limits_{AOB} dxdz + \iint\limits_{COB} dxdy = -7\cdot 2 + 2 = -12$$