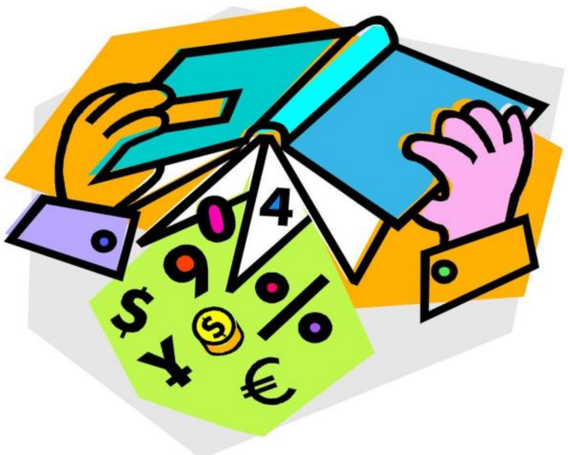
Лекция

Тема: **«Векторное поле_3»**

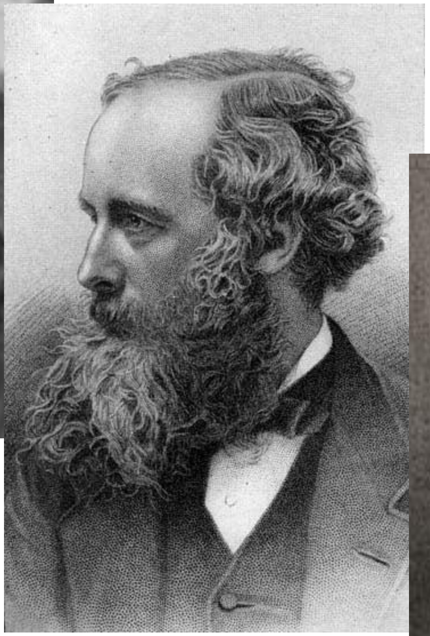


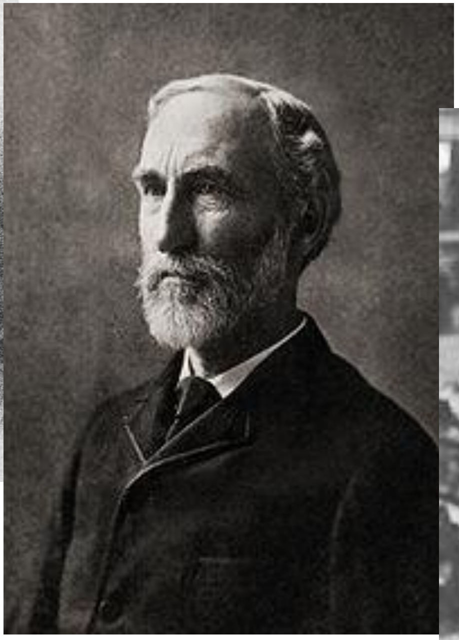
Майкл Фарадей (1791-1867)

Джеймс Клерк Максвелл (1831 – 1874)

Джозайя Уиллард Гиббс (1839-1903)

Оливер Хевисайд (1850 – 1925)





План

1. **Векторные дифференциальные операции**
2. **Специальные (простейшие) векторные поля и их свойства**
3. **Уравнения Максвелла**

1. Векторные дифференциальные операции

- Основные понятия векторного анализа удобно представлять с помощью оператора набла
(или оператора Гамильтона):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

1) Произведение набла на скалярную функцию $u = u(x, y, z)$ даёт градиент этой функции, ***т.е. векторное поле***

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \quad \text{или} \quad \nabla u = grad u$$

2) Скалярное произведение набла

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

на векторную функцию

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

даёт дивергенцию этой функции или ***скалярное поле***

$$\nabla \cdot \overline{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = div\vec{a}(M)$$

3) Векторное произведение набла

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

на векторную функцию

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

даёт ротор этой функции или ***векторное поле***

$$\nabla \times \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\vec{a}(M)$$

4) Скалярное произведение оператора набла на оператор набла $\nabla * \nabla$ соответствует скалярному дифференциальному оператору

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Этот оператор называется оператором Лапласа или лапласианом и обозначается символом Δ, т.е.

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Пусть имеется скалярное поле $u = u(M)$ и градиент $grad u(M)$ этого скалярного поля, т.е. векторное поле

- **Можно найти дивергенцию и ротор этого векторного поля:**

$$u(M) \to grad u(M) \to \begin{cases} div grad u - (1) \\ rot grad u - (2) \end{cases}$$

Если имеется векторное поле $\overline{a}(M)$, то оно порождает два поля:

$$\overline{a}(M) \rightarrow \begin{cases} div\overline{a}(M) - скалярное \quad поле \\ rot\overline{a}(M) - векторное \quad поле \end{cases}$$

К этим полям можно применить:
для первого скалярного поля дифференциальную операцию градиента,
а для второго, векторного поля, дифференциальные операции дивергенции и ротора:

$$\bar{a}(M) \to \begin{cases} div\bar{a}(M) \to graddiv\bar{a}(M) & (3) \\ rot\bar{a}(M) \to \begin{cases} divrot\bar{a}(M) & (4) \\ rotrot\bar{a}(M) & (5) \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом имеется **пять** векторных дифференциальных операций второго порядка:

$$u(M) \to grad\,u(M) \to \begin{cases} div\,grad\,u(M) - (1) \\ rot\,grad\,u(M) - (2) \end{cases}$$

$$\bar{a}(M) \to \begin{cases} div\,\bar{a}(M) \to grad\,div\,\bar{a}(M) & (3) \\ rot\,\bar{a}(M) \to \begin{cases} div\,rot\,\bar{a}(M) & (4) \\ rot\,rot\,\bar{a}(M) & (5) \end{cases} \end{cases}$$

Наиболее важными из пяти векторных дифференциальных операций второго порядка являются три из них:

- 1) $div\,grad\,u(M)$
- 2) $rot\,grad\,u(M)$
- 3) $div\,rot\,\overline{a}(M)$

1) $divgradu$

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\bar{a} = gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

- Компоненты вектора $\nabla u = gradu$ имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv Q, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} \equiv R$$

Тогда дивергенция вектора $grad u$ будет равна: $$div grad u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$$

Здесь оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ является оператором Лапласа: $\Delta = \nabla^2$

Выражение $div grad u$ можно записать с помощью оператора набла так:

$$div grad u = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u$$

2) $rot\,grad\,u$

По определению ротора

$$rot\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

- В данном случае вектор $\vec{a}=grad\,u$

или $grad\,u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$

Подставим градиент в формулу и получим:

$$rot\,grad\,u=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right)\cdot\bar{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\bar{k}=0$$

- С помощью оператора набла быстрее приходим к цели:

$$rot\,grad\,u=\nabla\times(\nabla u)=(\nabla\times\nabla)u=0$$

3) $div\,rot\,\vec{a}$

- В данном случае вектором $\vec{a}(M)$ является ротор: $rot\,\vec{a}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}$

Образуем дивергенцию от ротора:

$$div\,rot\,\vec{a}(M)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}\right)=0$$

В силу равенства вторых смешанных производных получаем ноль!

Запишем $div\,rot\,\overline{a}$ через оператор набла:

$$div\,rot\,\vec{a}(M) = \nabla \cdot (\nabla \times \overline{a}) = 0$$

- Смешанное произведение векторов в данном случае можно записать в виде определителя третьего порядка, две строки которого будут одинаковыми: такой определитель равен нулю

Замечание

- Операции $grad\,div\,\overline{a}(M)$ и $rot\,rot\,\overline{a}(M)$ встречаются реже.

Связь между ними выражается формулой:

$$rot\,rot\,\overline{a}(M) = grad\,div\,\overline{a}(M) - \Delta\overline{a}$$

2. Простейшие векторные поля

Простейшими векторными полями являются такие, для которых:

1) $div\vec{a}(M)=0$

2) $rot\vec{a}(M)=0$

3) $div\vec{a}(M)=0$ и $rot\vec{a}(M)=0$

1) Трубчатое (соленоидальное) поле
(от лат. «solen»-трубка)

Векторное поле, для всех точек которого дивергенция равна нулю, называется трубчатым: $div\vec{a}(M) = 0$

- В частности, поле ротора любого вектора – трубчатое поле, так как

$$div rot\overline{a} = 0$$

Свойства соленоидального поля

1) если векторное поле $\overline{a}(M)$ является ротором некоторого векторного поля, т.е.

$\overline{a}(M) = rotA(M)$, то оно является ***соленоидальным***

Вектор А(М) называют векторным потенциалом поля $\overline{a}(M)$

2) поток векторного поля через любую замкнутую поверхность равен 0.

2) Потенциальное, или безвихревое, поле

Если во всех точках поля ротор равен нулю

$$rot\vec{a}(M) = 0,$$

то такое поле называют безвихревым или потенциальным

- Доказано, что $rot\,grad\,u = 0.$ Следовательно, поле градиента любой функции u(x,y,z) является потенциальным, а сама функция u(x,y,z) есть его потенциал

Свойства потенциального поля

1) Векторное потенциальное поле $\overline{F}(M)$ является градиентом некоторого скалярного поля: $\overline{F}(M) = grad u(M)$

Функцию *u(M)* называют ***потенциалом*** векторного поля $\overline{F}(M)$

2) Циркуляция потенциального вектора поля по любому замкнутому контуру *(L) равна нулю*

3) Векторные линии потенциального поля незамкнуты

4) В потенциальном поле векторные линии перпендикулярны к поверхностям уровня потенциала

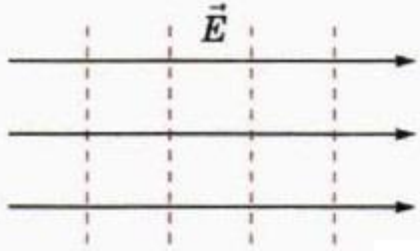


Рис. 53.5

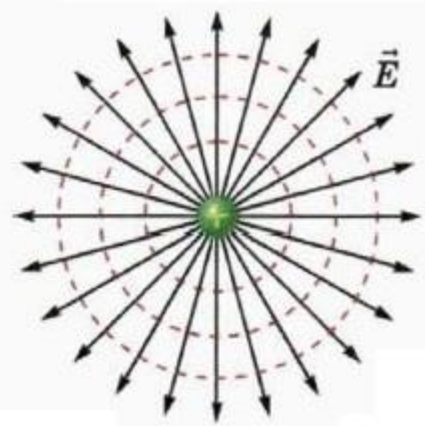


Рис. 53.6

Замечание

- ***Потенциал u(x,y,z) находится по формуле:***

$$u(x,y,z) = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz$$

- ***циркуляция потенциального векторного поля не зависит от формы контура и по замкнутому контуру равна нулю***

3) Гармоническое (лапласово)поле

Векторное поле, являющееся одновременно и потенциальным, и трубчатым, называется гармоническим.

Свойства гармонического поля

1)Если поле $\overline{F}(M)$ гармоническое, то

$$rot\overline{F}(M)=0 \quad \text{и} \quad div\overline{F}(M)=0$$

2) Если поле $\overline{F}(M)$ гармоническое, то существует скалярная функция *u(M) такая, что*

$$\overline{F}(M)=grad\,u(M)$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

Так как векторное поле потенциально, то можно записать, что $\overline{a}(M) = grad u$

Условие соленоидальности означает, что

$$div\overline{a} = div grad u = 0$$

или

$$div grad u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u = 0$$

- Функции u(x,y,z), подчиняющиеся условию

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad ,$$

называют ***гармоническими***

Уравнение

$$\Delta u = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

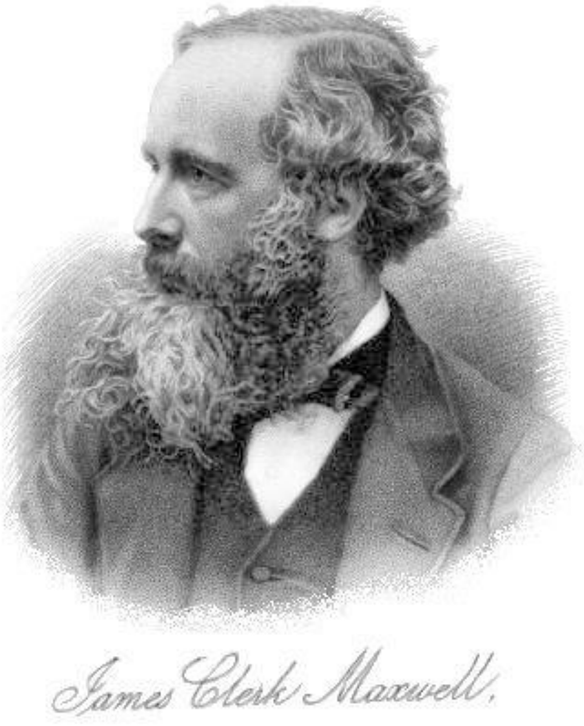
называют уравнением Лапласа

***ТЕОРЕМА:* любое векторное поле $\vec{a}(M)$, заданное во всем пространстве и убывающее до нуля на бесконечности вместе со своими ротором и дивергенцией, может быть единственным образом представлено в виде суммы потенциального и соленоидального полей:**

$$\vec{a}(M) = \overline{a}_p + \overline{a}_s$$

4. Уравнения Максвелла

- **Уравнения Максвелла** — система уравнений в дифференциальной или интегральной форме, описывающих электромагнитное поле и его связь с электрическими зарядами и токами в вакууме и сплошных средах.



- Вместе с выражением для силы Лоренца, задающим меру воздействия электромагнитного поля на заряженные частицы, эти уравнения образуют полную систему уравнений ***классической электродинамики***, называемую иногда уравнениями Максвелла — Лоренца

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В интегральной форме:

$$\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right)$$

$$\oint_L (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right)$$

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \int_V \rho dV$$

$$\oint_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$$

В дифференциальной форме:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$$

Задание к лекции: «Вспомним физику»

1.Ввести обозначения величин, входящих в уравнения, и указать единицы измерения в СИ

2. Каждому уравнению Максвелла дать физическую интерпретацию (словесное выражение, раскрыть физический смысл)