Дополнение к Лекции_4_Векторные поля_3
Тема: «Специальные простейшие векторные поля и их свойства»

Скалярные величины (поля)	Векторные величины (поля)
1. производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial n}$ 2. поток $П$ 3. дивергенция $div\vec{a}(M)$ 4. циркуляция $Ц$	1. градиент $gradu$ 2.ротор $rot\vec{a}(M)$

Оператор набла (оператор Гамильтона): $\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$

Запишем выражения для скалярных и векторных полей через оператор набла:

Запись полей через оператор набла ∇	Пояснения
1. $gradu = \nabla u$	$\nabla u = (\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z})u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = gradu$
2. $div\vec{a}(M) = \overbrace{\nabla \cdot \vec{a}(M)}^{\text{скалярное произведение}}$	$\overbrace{\nabla \cdot \vec{a}(M)}^{\text{скалярное произведение}} = (\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) =$ $= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = div\vec{a}(M)$
3. $rot\vec{a}(M) = \overbrace{\nabla \times \vec{a}(M)}^{\text{векторное произведение}}$	$\overbrace{\nabla \times \vec{a}(M)}^{\text{векторное произведение}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\vec{a}(M)$

Кроме дифференциального оператора 1-го порядка набла (оператора Гамильтона), существует дифференциальный оператор 2-го порядка – <u>оператор Лапласа</u>:

$$\boxed{\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

Действие этого оператора на функцию u выглядит так: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОЛЯ.

Название поля	Вид поля	Условие, выполняющееся для данного поля	Примеры
Соленоидальное (трубчатое) (solen- с лат.языка трубка)	векторное поле $\vec{a}(M)$	$div\vec{a}(M)=0$ $\Downarrow$ $П=\underbrace{\oiint\limits_S a_n(M)dS}_{\substack{поток\ через\\ любую\ замкнутую\\ поверхность}}=0$	1) поле скоростей жидкости при отсутствии стоков и истоков 2) поле ротора любого векторного поля
Безвихревое (потенциальное) *	векторное поле $\vec{a}(M)$	$rot\vec{a}(M)=0, т.е. \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$ $\Downarrow$ $Ц=\oint\limits_L \underbrace{\vec{a}(M)\cdot d\vec{l}}_{\substack{циркуляция\ по\\ замкнутому\ контуру}}=0$	1) поле градиента любого скалярного поля
Лапласовое (гармоническое)	скалярное поле $u(M)$	$\Delta u=0$ (*уравнение Лапласа*) *т.е.* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$	1) стационарное распределение теплоты 2) электростатическое поле точечных зарядов

*Примечание: **потенциал безвихревого поля** вычисляется по формуле:

$$\boxed{u(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int\limits_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz}$$

$$\boxed{u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy}$$