Лекция 5

Тема: «Скалярные и векторные поля: подведение итогов. Подготовка к контрольной работе»

План.

1. Скалярные поля и их характеристики: градиент и производная по направлению
2. Векторные поля и их характеристики:
   1) Поток и дивергенция. Теорема Остроградского - Гаусса
   2) Циркуляция и ротор. Теорема Стокса
   3) Простейшие векторные поля: потенциальное, соленоидальные, гармоническое
3. Дифференциальные операции первого и второго порядка

1. ВСПОМНИМ!

Производная по направлению: $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$,

$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{l}|}\cos\beta=\frac{y}{|\vec{l}|}\quad\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{l}|}\ |\vec{l}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y} и \frac{\partial u}{\partial z}$ в формуле характеризуют скорость изменения функции u в направлении осей координат.
- Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ в формуле характеризует скорость изменения функции u в точке M по направлению вектора $\vec{l}$.
- Производная по направлению – величина скалярная

Градиент (оператор набла или оператор Гамильтона)

Оператор – это определённые математические действия (или их последовательность) предложенная в виде определённых математических символов.

Примечание: оператор всегда действует на выражение, стоящее справа от него

$$grad u=\nabla u$$

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=grad u$$

Физический смысл градиента:

$grad u$ - это вектор

- <u>модуль</u> градиента равен наибольшей скорости возрастания скалярного поля u в данной точке.
- <u>направление:</u> градиент указывает направление наибольшего возрастания скалярного поля u в данной точке.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ:</u> Градиент скалярного поля в каждой точке перпендикулярен поверхностям уровня этого скалярного поля.

<u>Задача 1.</u> Для заданной функции $z = f(x, y)$ найти градиент (вектор и модуль) и производную этой функции в заданной точке $M(x_0, y_0)$ и направлении вектора $\vec{l}$, составляющего угол α с положительным направлением оси Ox:

$$z = 2\cos(x+y) + 2x, M(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}), \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

<u>Решение</u>

1. **По определению градиент функции в точке *M(x,y)*** определяется формулой**:** $gradz(x,y)\big|_M = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M \vec{j}$

   Найдём частные производные функции $z(x,y) = 2\cos(x+y) + 2x$

$$\frac{\partial z(x;y)}{\partial x} = \left(2\cos(x+y)+2x\right)_x{}' = \begin{vmatrix} y = const \\ (\cos z)'_x = -z'_z \sin z \end{vmatrix} = -2\sin(x+y) + 2$$

$$\frac{\partial z(x;y)}{\partial y} = \left(2\cos(x+y)+2x\right)_y{}' = \left|x = const\right| = -2\sin(x+y)$$

   Вычислим значения производных в т. $M(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M = -2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) + 2 = -\sqrt{3} + 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M = -2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

   Градиент данной функции в заданной точке равен:

$$gradz(x,y)\big|_M = (-\sqrt{3}+2)\vec{i} - \sqrt{3}\cdot\vec{j}$$

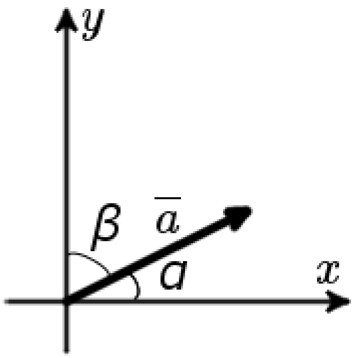
   Модуль (величина) градиента в заданной точке определяется формулой:

$$|gradz|_M = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M\right)^2} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + (-\sqrt{3})^2} \approx 1{,}753(\text{ед.скорости})$$

2. Производную по направлению в заданной точке найдём по формуле:

$$\frac{\partial z(x;y)}{\partial l}\Big|_M = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M \cdot\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M \cdot\cos\beta$$

По условию $\alpha = \frac{\pi}{3}$, тогда $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$



Подставим данные и получим:

$$\left.\frac{\partial z(x;y)}{\partial l}\right|_M = (-\sqrt{3}+2)\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx -1{,}366(\textit{ед.скорости})$$

2. Векторные поля и их характеристики:
   1) Поток и дивергенция. Теорема Остроградского - Гаусса

ВСПОМНИМ!

Потоком П вектора $\vec{a}(M)$ (или **потоком векторного поля** $\vec{a}(M)$), где $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, через поверхность S называется поверхностный интеграл:

$$\boxed{\Pi = \underbrace{\iint\limits_S (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS}_{\textit{поверхностный интеграл } 1^{\textit{го}} \textit{ рода}}} =$$

$$\boxed{\underbrace{\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy}_{\textit{поверхностный интеграл } 2^{\textit{го}} \textit{ рода}}} = \boxed{\iint\limits_S \overbrace{\vec{a}(M)\cdot\vec{n}_0}^{\substack{\textit{скалярное}\\ \textit{произведение}}}\, dS} = \left|\begin{matrix}\textit{здесь } \vec{n}_0 -\\ \textit{единичный}\\ \textit{вектор нормали}\end{matrix}\right| =$$

$$= \iint\limits_S |\vec{a}(M)|\cdot\underbrace{|\vec{n}_0|}_{1}\cdot\cos\varphi\cdot dS = \left|\begin{matrix}\textit{здесь } \varphi -\\ \textit{угол между}\\ \vec{a}(M) \textit{ и } \vec{n}_0\end{matrix}\right| = \boxed{\iint\limits_S \underbrace{a_n(M)}_{\substack{\textit{проекция}\\ \vec{a} \textit{ на } \vec{n}_0}}\, dS}$$

<u>Физический смысл:</u> если векторное поле $\vec{a}(M)$ - поле скоростей жидкости, то потоком является количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность S.

Особый интерес представляет случай, когда <u>S - замкнутая поверхность</u>. В этом случае <u>берут внешнюю нормаль</u>, а формула для потока принимает вид:

$$\boxed{\Pi = \oiint\limits_S a_n(M)dS}$$

Дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, где функции ($P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$) называется <u>скаляр</u>:

$$\boxed{div\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_M + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big|_M + \frac{\partial R}{\partial z}\Big|_M}$$

(значения частных производных берутся в точке М)

<u>Физический смысл:</u> дивергенция векторного поля скоростей характеризует плотность истоков (или стоков) жидкости или по-другому – мощность истока или стока.

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

($P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$) называется вектор:

$$\boxed{rot\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}}$$

или

$$\boxed{rot\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}}$$

<u>Физический смысл:</u> если $\vec{a}(M)$ - поле скоростей твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, то с точностью до числового множителя ротор векторного поля $\vec{a}(M)$ представляет собой мгновенную угловую скорость ω этого вращения $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{a}(M)$

Циркуляцией Ц векторного поля $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ вдоль контура L называется криволинейный интеграл по замкнутому пути L от скалярного произведения векторов $\vec{a}(M)$ и $d\vec{l}$:

$$\boxed{Ц = \oint_L \vec{a}(M) \cdot d\vec{l} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz}$$

<u>Физический смысл:</u> в силовом поле циркуляция выражает работу силового поля при перемещении материальной точки вдоль пути L.

Скалярные характеристики (поля)	Векторные характеристики (поля)
1. производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial n}$ 2. поток $П$	1. градиент $gradu$ 2.ротор $rot\vec{a}(M)$

3. дивергенция $div\vec{a}(M)$ 4. циркуляция $Ц$	

• **Формула (теорема) Остроградского- Гаусса:**

Поток вектора $\vec{a}(M)$ через <u>замкнутую поверхность</u> S в направлении <u>внешней нормали</u> равен тройному интегралу от дивергенции поля $\vec{a}(M)$, взятому по области, ограниченной поверхностью S :

$$\boxed{\oiint_S a_n(M)dS = \iiint_V div\vec{a}(M)dV}$$

• **Формула Стокса:**

Пусть S - <u>замкнутая</u> гладкая ориентируемая поверхность, а L - замкнутая гладкая кривая, являющаяся границей поверхности S. Пусть $\vec{n}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - единичная нормаль к поверхности S, задающая одну из её сторон. Пусть векторное поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ непрерывно, дифференцируемо на S и L, тогда:

$$\oint Pdx + Qdy + Rdz = \begin{cases} = \iint_S [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma]dS \\ = \iint_S (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dxdz + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy \end{cases}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{a}(M)\cdot d\vec{l} = \iint_S (rot\vec{a}(M)\cdot\vec{n})dS}$$

Задача 2

Даны векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ **и плоскость** $Ax + By + Cz + D = 0\ (p)$**, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду** V **. Пусть** σ **– основание пирамиды, принадлежащее плоскости** (p)**;** λ **– контур, ограничивающий** σ**;** $\bar{n}$ **– нормаль к** σ**, направленная вне пирамиды** V **:** $\vec{a} = (x+2y)\vec{j}$ **,** $(p) - x + 4y + z - 4 = 0$**. Сделать чертеж.**

Требуется вычислить:

1) **циркуляцию векторного поля** $\bar{a}$ **по замкнутому контуру** λ **(по определению и используя теорему Стокса)**
2) **поток векторного поля** $\bar{a}$ **через полную поверхность пирамиды** V

<u>Решение</u>

Анализ условия:

Векторное поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ задано одной компонентой: $\vec{a} = (x+2y)\vec{j} \Rightarrow Q(x,y,z) = x + 2y$

Построим пирамиду $(p) - x + 4y + z - 4 = 0$**:**

Координаты вершин: $A(-4;0;0), B(0;1;0), \quad C(0;0;4)$

1) По определению циркуляция векторного поля по замкнутому контуру λ (*ABCA*) равна:

$$Ц = \oint_L \vec{a}(M)\cdot d\vec{l} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

Согласно условию $\vec{a} = (x+2y)\vec{j} \Rightarrow Q(x,y,z) = x+2y$, поэтому получаем:

$$Ц = \int_{ACBA} Qdy = \int_{AC} Qdy + \int_{CB} Qdy + \int_{BA} Qdy$$

Вычислим интегралы:

$$\int_{AC} = \left| на \quad y=0 \quad dy=0 \right| = \int_{AC} = 0$$

$$\int_{CB} = \left| \begin{matrix} на \quad CB \quad x=0 \\ Q=2y \quad y_1=0 \quad y_2=1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 2ydy = y^2 \Big|_0^1 = 1$$

$$\int_{BA} = \left| \begin{matrix} на \quad BA \quad z=0 \; уравнение \quad BA: \; -x+4y-4=0 \\ x=4y-4 \quad Q=4y-4+2y=6y-4 \quad y_1=1 \quad y_2=0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_1^0 (6y-4)dy = 3y^2 \Big|_1^0 - 4y\Big|_1^0 = -3+4=1$$

Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру

λ (*ABCA*) равна: $$Ц = \int_{ACBA} Qdy = 0+1+1+ = 2$$

Вычислим циркуляцию по теореме Стокса:

$$Ц = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Согласно условию $\vec{a} = (x+2y)\vec{j} \Rightarrow Q(x,y,z) = x+2y$, **то есть все частные производные, кроме** $\frac{\partial Q}{\partial x}$**, равны 0.**

Поэтому получаем: $Ц = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$

Находим: $\frac{\partial Q}{\partial x} = (x+2y)'_x = 1$**, тогда** $Ц = \iint_S dxdy$

Вспомним геометрический смысл двойного интеграла (частный случай): данный интеграл будет численно равен площади треугольника AOB:

$$Ц = \iint_{S_{AOB}} dxdy = \frac{1}{2} AO \cdot OB = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 1 = 2$$

2) Поток векторного поля ā **через полную поверхность пирамиды** *V* **вычислим по теореме Остроградского – Гаусса**

$$\boxed{\Pi = \iiint\limits_V div\vec{a}(M)dV}$$, где $$\boxed{div\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_M + \frac{\partial Q}{\partial y}\bigg|_M + \frac{\partial R}{\partial z}\bigg|_M}$$

Найдем дивергенцию векторного заданного векторного поля

$\vec{a} = (x+2y)\vec{j} \Rightarrow Q(x,y,z) = x+2y$

$$\boxed{div\vec{a} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \left(x+2y\right)_y' = 2}$$

Вычисляем поток: $$\boxed{\Pi = \iiint\limits_V div\vec{a}(M)dV = \iiint\limits_V 2\cdot dV = 2\iiint\limits_V dV}$$

Воспользуемся геометрическим смыслом тройного интеграла (частный случай): если подынтегральная функция численно равна единице, то тройной интеграл равен объёму области интегрирования.

Область интегрирования – треугольная пирамида.

Её объём равен: $V = \frac{1}{6}x\cdot y\cdot z = \frac{1}{6}\cdot 4\cdot 1\cdot 4 = \frac{8}{3}$

Следовательно, поток равен: $\Pi = 2\cdot\frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

Задание к задаче 2. Сделать анализ полученных результатов и описать свойства заданного векторного поля

<u>Задача 3.</u> Проверить, является ли векторное поле $\vec{a} = (2x+3yz)\vec{i} + (2y+3xz)\vec{j} + (2z+3xy)\vec{k}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}$ найти его потенциал $U(x,y,z)$:

<u>Решение</u>

1. **Поле, дивергенция которого равна 0, является соленоидальным. Вычислим дивергенцию данного поля:**

$$div\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Согласно условию компоненты векторного поля, равны:

$P(x,y,z) = (2x+3yz)$

$Q(x,y,z) = (2y+3xz)$

$R(x,y,z) = (2z+3xy)$

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} = (2x+3yz)_x' = 2$$

$$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} = (2y+3xz)_y' = 2$$

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = (2z+3xy)_z' = 2$$

Находим: $div\vec{a} = 2+2+2 = 6$

Сделать вывод!!!

2. **Выясним, является ли данное поле потенциальным (безвихревым). Для этого необходимо вычислить ротор данного поля.**
   И если ротор равен нулю, то поле является потенциальным:

$$rot\vec{a}(M)=0, \text{т.е.} \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

Вычислим частные производные:

$$P(x,y,z)=(2x+3yz)\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=(2x+3yz)'_y=3z, \qquad \frac{\partial P}{\partial z}=(2x+3yz)'_z=3y$$

$$Q(x,y,z)=(2y+3xz)\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=(2y+3xz)'_x=3z, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=(2y+3xz)'_z=3x$$

$$R(x,y,z)=(2z+3xy)\Rightarrow\frac{\partial R}{\partial x}=(2z+3xy)'_x=3y, \qquad \frac{\partial R}{\partial y}=(2z+3xy)'_y=3x$$

Получаем:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=3z$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=3x$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=3y$$

Равенство частных производных доказано: ротор равен 0.
Вывод: данное поле является потенциальным

3. Найдём потенциал, используя формулу:

$$\boxed{u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{.z_0}^{z}R(x,y,z)dz}$$

Пусть $x_0=0, \quad y_0=0, \quad z_0=0$

Тогда $P(x,0,0)=2x$, $Q(x,y,0)=2y$, $R(x,y,z)=(2z+3xy)$

$$u(x,y,z)=\int_0^x 2xdx+\int_0^y 2ydy+\int_0^z (2z+3xy)dz$$

$$u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+3xyz$$

Задача 4. Найти $rot(\vec{F}\cdot\vec{a})\vec{b}$, где $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}, \vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

Решение

1. **Найдём произведение** $(\vec{F}\cdot\vec{a})$:

$$\left(\overline{F}\cdot\overline{a}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\left(y-z\right)\bar{i}-\left(x-z\right)\bar{j}+\left(x-y\right)\bar{k}$$

2. **Найдём произведение** $(\vec{F}\cdot\vec{a})\cdot\overline{b}$:

$$\left(\overline{F}\cdot\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ y-z & z-x & x-y\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=(x-z+x-y)\bar{i}-(z-y-x+y)\,\bar{j}+(z-y+x-z)\bar{k}=$$

$$=(2x-y-z)\bar{i}+(x-z)\,\bar{j}+(x-y)\bar{k}$$

3. **Вычислим** $rot(\vec{F}\cdot\vec{a})\vec{b}$

$$rot\left(\overline{F}\cdot\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (2x-y-z) & (x-z) & (x-y)\end{vmatrix}=(-1+1)\bar{i}-(1+1)\,\bar{j}+(1+1)\bar{k}=$$

$$=-2\,\bar{j}+2\bar{k}$$