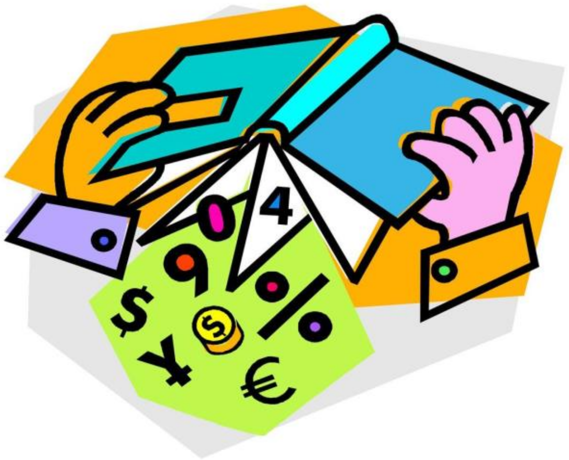
Лекция
Тема:
«Числовые ряды - 1»



ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ И УМЕТЬ?

Знать:

1) **Понятие предела функции**
2) **Свойства предела функции. Понятие эквивалентных функций. Основные соотношения эквивалентности**
3) **Неопределенности и способы разрешения неопределённостей, возникающих при вычислении пределов. Замечательные пределы.**

Уметь:

Вычислять пределы, разрешать неопределённости

Вычислять несобственные интегралы первого рода с бесконечным верхним пределом

- **Вспомнить всё это!**

Ряды представляют собой **ПРОСТОЙ И СОВЕРШЕННЫЙ ИНСТРУМЕНТ** математического анализа для

- приближенного вычисления функций, интегралов,
- решений дифференциальных уравнений

- ***Ряды*** **— незаменимый инструмент исследования не только в математике, но и в физике, астрономии, информатике, статистике, экономике и других науках**

План

1. Понятие числового ряда. Основные теоретические сведения
2. Положительные ряды:

   признаки сходимости положительных рядов

Из истории науки

- Понятия ***бесконечных*** сумм и суммы членов бесконечной геометрической прогрессии (знаменатель положительный, меньше единицы) использовалось еще учеными Древней Греции.
- Уже в XVII веке ***И. Ньютон и Г. Лейбниц*** использовали ряды для решения алгебраических и дифференциальных уравнений.
- Мощное развитие теория рядов получила в XVIII-XIX вв. в работах **И. Бернулли, Б.Тейлора, К. Маклорена, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа** и др.
- Завершенное развитие ***теория рядов*** получила в XIX в. ***на основе понятия предела*** в работах **К.Гаусса, Б. Больцано, О.Коши, Б.Римана** и др.

1. Понятие числового ряда. Основные теоретические сведения

- ***Определение:*** числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, соединенная знаком сложения:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

- Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются членами ряда,
  а член u_n называется общим членом ряда

- Ряд считается заданным, если известен его общий член

$$u_n = f(n), (n = 1, 2, \ldots) \quad ,$$

т.е. задана функция $f(n)$ натурального аргумента,

здесь *n –переменная – «счётчик»*

- Символ $\sum_{n=1}^{\infty}$ означает, что выполняется

суммирование от 1 до плюс бесконечности, то есть сначала n=1, затем n=2, и т.д.

Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля, с двойки, либо с произвольного ***натурального*** числа:

$$\sum_{n=0}^{\infty}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}$$

Например,

десятичную дробь с бесконечной дробной частью можно рассматривать как сумму ряда.

Так число

$$\pi = 3{,}1415926...$$

есть сумма следующего ряда:

$$\pi = 3 + \frac{1}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + ...$$

- Рассмотрим суммы **конечного числа** членов ряда:

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$\dots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

- Сумма ***n*** первых членов ряда S_n называется частичной суммой ряда.

СХОДЯЩИЕСЯ И РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

- ***Определение:***

ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$

называется **СХОДЯЩИМСЯ**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм.

Этот предел называется **СУММОЙ РЯДА**: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

- Если же последовательность частичных сумм ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

не имеет конечного предела, то ряд называется **РАСХОДЯЩИМСЯ**.

РАСХОДЯЩИЙСЯ РЯД НЕ ИМЕЕТ СУММЫ.

Примеры

- Исследовать на сходимость ряды:

ЗАДАЧА 1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

Построим частичные суммы

$$S_1=\frac{1}{2}; \qquad S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4};$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8};$$

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

- Применим к последнему выражению формулу для суммы членов геометрической прогрессии, получим:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

- Найдем предел ***n-ой*** частичной суммы при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$$

Ответ: заданный ряд является сходящимся и его сумма равна единице:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

- **ЗАДАЧА 2.** $\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots$

- РЕШЕНИЕ

ПОСТРОИМ ЧАСТИЧНЫЕ СУММЫ

$$S_1 = \ln 2;$$

$$S_2 = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} = \ln 3;$$

$$S_3 = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} = \ln 4;$$

$$S_n = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$$

- Найдем предел ***n-ой*** частичной суммы при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) =$$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty}(n+1)\right) = \infty$$

- **Ответ:** заданный ряд является ***РАСХОДЯЩИМСЯ.***

ЗАДАЧА 3. $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

- Решение

- Построим частичные суммы:

$$S_1=1; \qquad S_2=1-1=0;$$

$$S_3=1-1+1=1;$$

$$S_4=1-1+1-1=0$$

и т.д.

- ***Ответ:*** заданный **РЯД РАСХОДИТСЯ**, т.к. последовательность частичных сумм не стремится ни к какому пределу.

☝**ЗАМЕЧАНИЕ**

Когда последовательность частичных сумм не имеет никакого предела, ***расходящийся ряд называется неопределенным***.

Замечание

- Бесконечный ряд $1-1+1-1+\ldots$

или $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+\ldots$$

иногда называемый **рядом Гранди** в честь итальянского математика, философа и священника ***Гвидо Гранди***.

Одной из основных задач в теории рядов является исследование ряда на сходимость

НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА

- **Теорема:** Если ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$,

то есть

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ.

Ряд, у которого общий член стремится к нулю, может сходиться, а может и расходиться.

То есть условие $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ является

НЕОБХОДИМЫМ, но

НЕ ДОСТАТОЧНЫМ условием сходимости ряда.

Основные теоремы, отражающие свойства рядов

- **СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ**

1) Если ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится и имеет сумму $\boldsymbol{S}$, то и ряд

$$\lambda u_1 + \lambda u_2 + \ldots + \lambda u_n + \ldots$$

(полученный умножением данного ряда на число λ) также сходится и имеет сумму λS .

2) Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.

☝**Замечание.** Если ряд расходится, то расходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.

3) Если ряды $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ и $v_1 + v_2 + ... + v_n + ...$ сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то и ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + ... + (u_n + v)_n + ...$$

(представляющий сумму данных рядов) также сходится и его сумма равна $S_1 + S_2$

2. Достаточные признаки сходимости положительных рядов

Определение:

числовой ряд называется знакоположительным, если при всех n=1, 2, 3, … $u_n > 0$

ЗАМЕЧАНИЕ

нахождение суммы ряда $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ часто связано с большими техническими трудностями.

Сходимость или расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью **достаточных признаков сходимости числовых рядов.**

Первый признак сравнения

- Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2), причем члены первого

ряда не превосходят членов второго, т.е. при любом ***n*** $u_n \le v_n$.

Тогда: если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1); если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

- **Иными словами,**

из СХОДИМОСТИ ряда с БОЛЬШИМИ членами следует сходимость ряда с МЕНЬШИМИ членами;

Из РАСХОДИМОСТИ ряда с МЕНЬШИМИ членами следует расходимость ряда с БОЛЬШИМИ членами

Замечания

1. Признак сравнения справедлив и в случае, если неравенство $u_n \le v_n$ выполняется не с ***n=1*** **,** ***а с некоторого номера k***
2. Для использования признака сравнения нужно иметь ряды, про которые заранее известно, сходятся они или расходятся

Ряды, используемые для сравнения.

- геометрический ряд $\sum a\cdot q^{n-1}$ сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$
- гармонический ряд $\sum\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ расходится
- обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha<1$

- Расходятся ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

- Сходятся ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

- **ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ:**

Сумму **ряда обратных квадратов** лучшие математики Европы не могли найти более 100 лет:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Задача 4.

Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$$

Решение

Рассмотрим ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\ldots$

Он расходится, т.к. получен из гармонического ряда отбрасыванием первого члена

Так как $\ln(n+1) < n+1$ при любом $\boldsymbol{n}$ = 1, 2, 3,..,

то $$\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, данный ряд расходится по первому признаку сравнения

- Первый признак сравнения имеет недостатки:

1) число «эталонных» рядов ограничено

2) далеко не всегда удаётся составить нужные неравенства

Например, при сравнении ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$

с сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

или при сравнении ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Второй (предельный) признак сравнения

- Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Задача 5.

- Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$,

используя предельный признак сравнения

Решение

Рассмотрим сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Пусть $u_n = \frac{1}{n^2 - n}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$

- Вычислим предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{vmatrix}1)\textit{по правилу Лопиталя}\\ 2)\textit{разделим на } n^2 \textit{ дробь}\end{vmatrix}=1$$

Таким образом существует конечный и отличный от

нуля предел и так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то

сходится и заданный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-n}$

ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА

- Если для ряда $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = D$, то этот ***ряд сходится при*** $D < 1$ и ***расходится при*** $D > 1$.

☝**Замечание.** Если ***D=1*** , то вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

ЗАДАЧА 5.

- Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$

Решение

Используем признак Даламбера $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$

По условию $u_n = \frac{2n-1}{3^n}$

Составим $u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}} = \frac{2n+1}{3^n \cdot 3}$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{3^n\cdot 3}\cdot\frac{3^n}{(2n-1)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{3}<1$$

следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера

ПРИЗНАК КОШИ (РАДИКАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ)

- Если для ряда $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$

  существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$,

  то этот ***ряд сходится при*** $C < 1$

  и ***расходится при*** $C > 1$.

☝**Замечание.** Если ***C=1*** , то вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК (КОШИ).

- Если функция ***f(n)*** при $n \geq 1$ - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = f(n)$ сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл первого рода $\int_N^{\infty} f(n)dn, (N \geq 1)$

ЗАДАЧА 6.

- Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

Решение

Используем интегральный признак

Коши $\int_{N}^{\infty} f(n)dn, (N \geq 1)$

По условию $f(n) = u_n = \frac{1}{2n+1}$

- **Вычислим интеграл** $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{2n+1} dn$

- **По определению**

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{2n+1} dn = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{2n+1} dn$$

1) Вычислим интеграл:

$$\int\limits_1^{b} \frac{1}{2n+1} dn = \frac{1}{2}\ln(2n+1)\Big|_1^b =$$

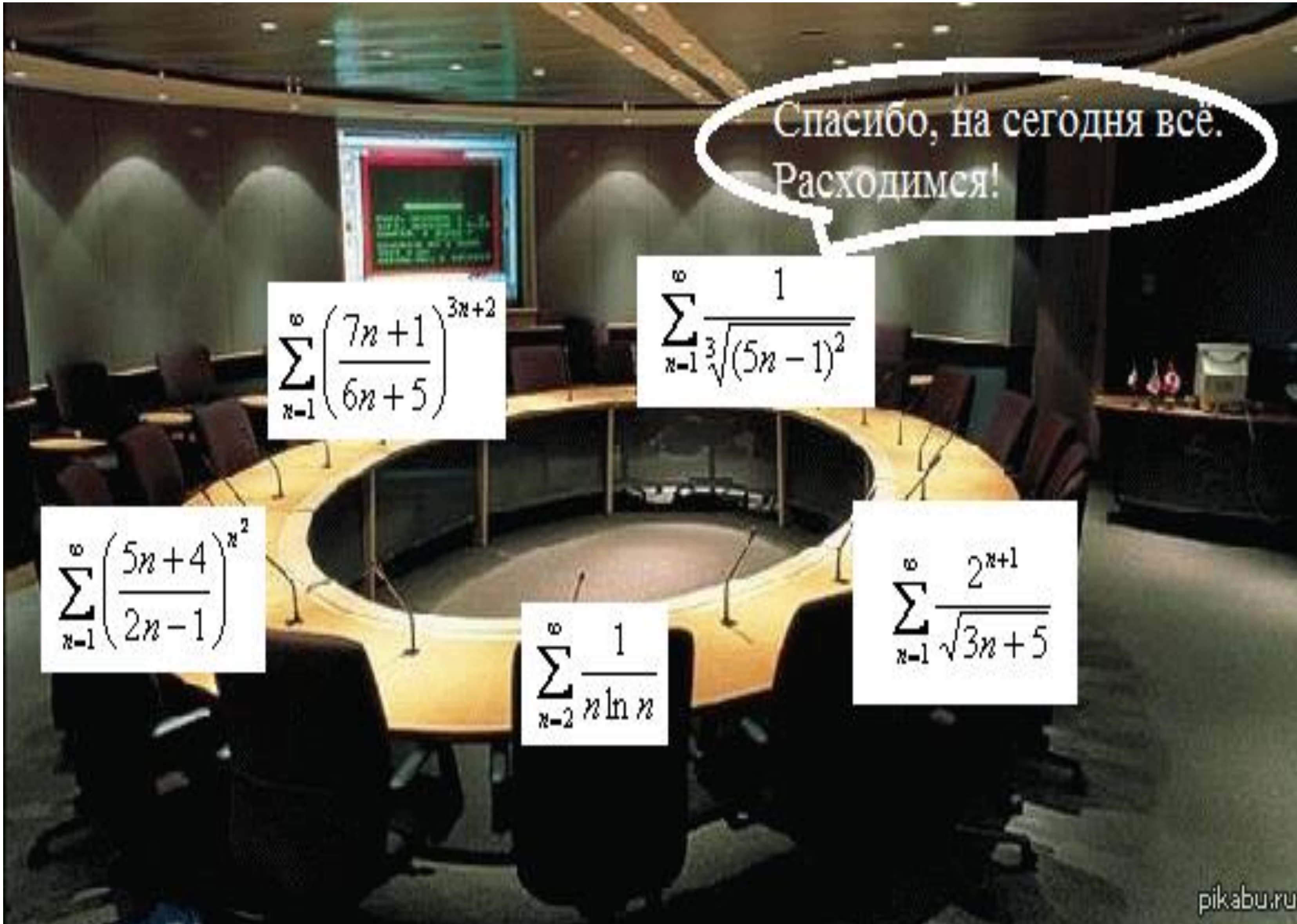
$$= \frac{1}{2}\left(\ln(2b+1) - \ln 3\right) = \frac{1}{2}\ln(2b+1) - \frac{1}{2}\ln 3$$

2) Найдём предел

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln(2b+1)-\frac{1}{2}\ln 3=\infty$$

Ответ: несобственный интеграл расходится, следовательно расходится и заданный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$

Задание: убедитесь, что признак Даламбера не даст ответа на вопрос о сходимости данного ряда



Спасибо, на сегодня всё.
Расходимся!
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^{n^2}$
$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$
pikabu.ru