Лекция 8
Тема:
«Функциональные ряды-1»

План

1. **Понятие функциональных и степенных рядов**
2. **Область сходимости степенного ряда**
3. **Ряды Тейлора и Маклорена**

Из истории науки

- Бесконечный ряд, который не сходится, называется *расходящимся*.
- По определению, сумма расходящегося ряда не может быть найдена с помощью метода частичных сумм.
- Тем не менее, математики разработали различные способы присваивания конечных числовых значений суммам этих рядов. Такая сумма называется *РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ* суммой расходящегося ряда.
- Процесс вычисления регуляризованных сумм называется ***РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ***.

Суммирование расходящихся рядов выполняют методами

- Абеля
- Бореля
- Чезаро
- Дирихле

Нильс Хенрик Абель
Niels Henrik Abel
(1802–1829)

- ***«РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ — ИЗОБРЕТЕНИЕ ДЬЯВОЛА, и это стыдно на них ссылаться при каких бы то ни было доказательствах. С их помощью, можно сделать любой вывод, какой ему будет угоден, и именно поэтому эти ряды производят столько ошибок и столько парадоксов.» (Н. Х. Абель в письме к своему учителю Берндту Хольмбою, январь 1826)***

1. Понятие функциональных и степенных рядов

- В бесконечной последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, соединенной знаком сложения,

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

члены могут быть не только числами, но и функциями

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ

  РЯД, СОСТАВЛЕННЫЙ ИЗ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ПЕРЕМЕННОЙ , НАЗЫВАЕТСЯ **ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ**:

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

- Пусть $x_0 \in \exists x$, тогда получаем ЧИСЛОВОЙ РЯД

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots$$

который может сходиться, а может и расходиться.

Если в точке x_0, ряд сходится, то x_0 - точка сходимости

Если в точке x_0, ряд расходится, то x_0 - точка расходимости функционального ряда

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

- СОВОКУПНОСТЬ ВСЕХ ТОЧЕК СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА НАЗЫВАЕТСЯ **ОБЛАСТЬЮ** ЕГО **СХОДИМОСТИ**

- К важнейшим классам функциональных рядов относятся СТЕПЕННЫЕ и ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ряды
- Пример тригонометрического ряда

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx + \ldots$$

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Степенным рядом называется функциональный ряд вида:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad ❶$$

так же ряды более общего вида:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad ❷$$

Где a - постоянная величина;

$$\underbrace{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots}_{Const}$$ - **коэффициенты степенного ряда**.

Говорят, что ряд ① расположен по степеням x ,

а ряд ② расположен по степеням $(x-a)$

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО степенных рядов состоит в том, что если степенной ряд сходится при $x = x_0$, то он сходится (и при том абсолютно) при всяком значении x, удовлетворяющему неравенству

$$|x - a| < |x - x_0|$$ (**теорема АБЕЛЯ**)

- Одним из следствий теоремы Абеля является факт существования для всякого степенного ряда интервала сходимости $|x-a|<R$ или $a-R<x<a+R$ с центром в точке **a**, ***внутри которого ряд сходится абсолютно и вне которого он расходится.***

На концах интервала сходимости (в точках $x=a\pm R$ ***) различные степенные ряды ведут себя по-разному***

- **Для того, чтобы найти область сходимости степенного ряда, необходимо**

1) найти радиус сходимости степенного ряда

2) найти интервал сходимости степенного ряда

3) исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

- РАДИУСОМ сходимости степенного ряда называется такое число ***R* , *что для*** $\forall x \ \ |x| < R$***, степенной ряд сходится , а для*** $\forall x \ \ |x| > R$ ***, расходится.***

- Областью сходимости степенного ряда является интервал $a-R<x<a+R$ (или $-R<x<+R$), к которому в зависимости от конкретных условий, могут быть добавлены **концевые** точки.

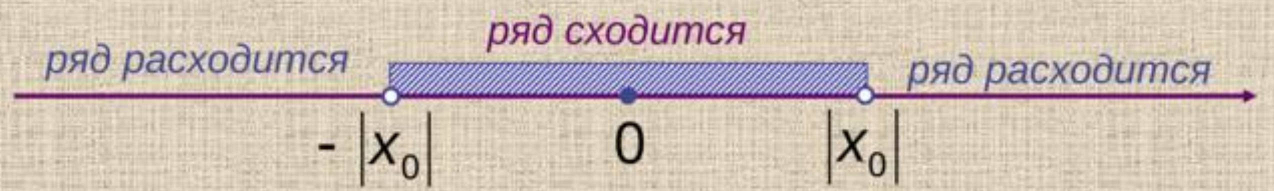
23.10.2020

Сходимость степенных рядов

Из теоремы Абеля следует, что существует такая точка x_0 ,что интервал:

$$(-|x_0|;|x_0|)$$

весь состоит из точек сходимости ряда, а при всех x вне этого интервала ряд расходится.



Интервал $(-|x_0|;|x_0|)$ называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда.

Положив $|x_0| = R$ интервал сходимости можно записать в виде : *(-R; R).*

Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда.

Возможны три случая:

1) **РЯДЫ ПЕРВОГО КЛАССА**. Область сходимости таких рядов состоит только из одной точки $x = 0$, то есть ряд расходится для всех значений ***x*, *кроме одного.***

Например,

$$1 + x + 2^2 \cdot x^2 + \ldots + n^n \cdot x^n + \ldots$$

2) РЯДЫ ВТОРОГО КЛАССА. Область сходимости состоит из всех точек оси ***Ox***, ***то есть ряд сходится при всех x***

3) РЯДЫ ТРЕТЬЕГО КЛАССА. Область сходимости состоит больше, чем из одной точки оси ***Ox***, ***причём есть точки, не принадлежащие области сходимости***

- Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда имеются несколько формул

Сходимость степенных рядов

По признаку Даламбера ряд сходится, если:

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \;\Rightarrow\; |x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \;\Rightarrow\; |x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Таким образом, для степенного ряда (1) радиус сходимости равен:

$$\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

Аналогично, пользуясь признаком Коши, можно установить, что

$$\boxed{R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

- Итак,

Интервал $(-R; R)$ называется **интервалом сходимости**

Неотрицательное число R, равное половине длины интервала сходимости называется **радиусом сходимости**;

Если уточнить поведение на концах интервала сходимости, то получим **область сходимости.**

Рис. 1

ПРИМЕР

Найти радиус, интервал и область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n (n+2)}$$

Решение

Согласно условию

$$a = 2 \qquad a_n = \frac{1}{3^n (n+2)} \qquad u_n = \frac{(x-2)^n}{3^n (n+2)}$$

1) Радиус сходимости найдём по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

- Составим a_{n+1}:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}((n+1)+2)} = \frac{1}{3^n \cdot 3(n+3)}$$

Далее находим

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n\cdot(n+2)}\cdot\frac{3^n\cdot 3\cdot(n+3)}{1} = 3$$

Итак, радиус сходимости $R = 3$

2) Интервал сходимости находим согласно формуле $a - R < x < a + R$

И получаем $2 - 3 < x < 2 + 3$

или $-1 < x < 5$

3) Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости

а) ***X* = -1**

Получаем знакочередующийся ряд с общим членом

$$u_n = \frac{(-1-2)^n}{3^n(n+2)} = \frac{(-3)^n}{3^n(n+2)} = \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n(n+2)} = \frac{(-1)^n}{(n+2)} \quad ,$$

сходимость которого исследуем по признаку Лейбница

- Проверим выполнение первого условия: $u_n > u_{n+1}$

  по условию $u_n = \dfrac{3}{n+2}$

  тогда $u_{n+1} = \dfrac{3}{n+3}$

  Очевидно, что $u_n > u_{n+1}$, т.е. условие выполняется
- Проверим выполнение второго условия: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n+2} = 0$

Вывод: оба условия выполнены.

Точка ***X = -1 принадлежит области сходимости ряда.***

б) ***X = 5***

Получаем положительный ряд с общим членом

$$u_n = \frac{(5-2)^n}{3^n(n+2)} = \frac{(3)^n}{3^n(n+2)} = \frac{1}{(n+2)}$$

- Сходимость ряда можно исследовать с помощью достаточных признаков сравнения (первого или предельного) или интегрального Коши.
- Воспользуемся интегральным признаком Коши – вычисли несобственный интеграл первого рода:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dn}{(n+2)}$$

По определению $$\int_1^{\infty}\frac{dn}{(n+2)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dn}{(n+2)}$$

1) $$\int_1^{b}\frac{dn}{(n+2)}=\ln(n+2)\Big|_1^b=\ln(b+2)-\ln 3=\ln\frac{b+2}{3}$$

2) $$\lim_{b\to\infty}\ln\frac{b+2}{3}=\infty$$

Предел равен бесконечности, интеграл расходится, расходится и ряд.

Вывод: ***X = 5 не принадлежит области сходимости ряда***

ОТВЕТ:

1) Радиус сходимости ряда $R = 3$
2) Интервал сходимости ряда
$$x \in (-1;+5)$$
3) Область сходимости ряда
$$x \in [-1;+5)$$

3. Ряды Тейлора и Маклорена

- Пусть функция ***f(x)*** является суммой степенного ряда:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots ,$$

интервал сходимости которого $(x_0 - R; x_0 + R)$

- ***В этом случае говорят, что функция f(x) разлагается в степенной ряд в окрестности точки x_0 или по степеням $(x-x_0)$***

Найдём коэффициенты этого ряда

Продифференцируем функцию

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots$$

$$f''(x)=2a_2+6a_3(x-x_0)+12a_4(x-x_0)^2+\ldots+n\cdot(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\ldots$$

$$f'''(x)=6a_3+24a_4(x-x_0)+\ldots+n\cdot(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}+\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1\cdot a_n+\ldots$$

Пусть $x = x_0$. Тогда получаем:

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x_0) = 2a_2$$

$$f'''(x_0) = 6a_3$$

$$f^{(4)}(x_0) = 24a_4$$

$$f^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1)(n-2)(n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$$

23.10.2020

Далее находим коэффициенты ряда

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} \qquad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!} \qquad a_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Определение

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $x_0 - R < x < x_0 + R$, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней **ряд Тейлора:**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

если этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{R_n(x)}_{\substack{\text{остаток} \\ \text{ряда}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$$

23.10.2020

- При $x_0 = 0$ получаем ряд **Маклорена**

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{/}(0)}{1!}x + \frac{f^{//}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Брук Тейлор (1685 - 1731)

Колин Маклорен (1698 – 1746)

- Разложение функции в ряд Тейлора (или Маклорена) позволяет приближённо ЗАМЕНИТЬ ФУНКЦИЮ СУММОЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ СТЕПЕННОГО РЯДА, т.е. многочленом
- Вычисление значений функции при этом сводится к вычислению значений многочлена, что можно сделать, производя только простейшие арифметические действия
- И, что особенно важно, можно оценить точность получаемых приближённых значений

Какие функции и в каких интервалах можно представить в виде суммы степенного ряда?

Таблица разложений некоторых функций в степенной ряд

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots, \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$\ln(1+t) = \frac{t}{1} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^n}{n} + \ldots, -1 < t < +1$$

$$\ln t = \frac{t-1}{1} - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3} - \frac{(t-1)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(t-1)^n}{n} + \ldots,$$
$$0 < t \le 2$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{t}} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots, -\infty < t < +\infty$$

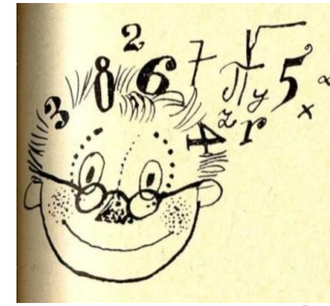
$$(1+t)^{\mathrm{m}} = 1 + \frac{m}{1!} t + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} t^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(2n-1)!} + \ldots$$

- разложение имеет место: $m \ge 0, \quad \text{если} \quad -1 \le t \le 1$

$$-1 < m < 0, \quad \text{если} \quad -1 < t \le 1$$

$$m \le -1, \quad \text{если} \quad -1 < t < 1$$

Математики шутят



ЧТО-ТО ТУТ НЕ СХОДИТСЯ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

СЪЕШЬ СНИКЕРС

ЛУЧШЕ?

ЛУЧШЕ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$