Лекция 9 Тема: «Функциональные ряды-2»

Практические приложения рядов

План

1. **Применение рядов в приближённых вычислениях**
2. **Вычисление пределов**
3. **Вычисление определённых интегралов**
4. **Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов**

Брук Тейлор
(1685 - 1731)

Колин Маклорен
(1698 – 1746)

- Разложение функции в ряд Тейлора (или Маклорена) позволяет приближённо ЗАМЕНИТЬ ФУНКЦИЮ СУММОЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ СТЕПЕННОГО РЯДА, т.е. многочленом
- Вычисление значений функции при этом сводится к вычислению значений многочлена, что можно сделать, производя только простейшие арифметические действия
- И, что особенно важно, можно оценить точность получаемых приближённых значений

Какие функции и в каких интервалах можно представить в виде суммы степенного ряда?

Таблица разложений некоторых функций в степенной ряд

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots, \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$\ln(1+t) = \frac{t}{1} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^n}{n} + \ldots, -1 < t < +1$$

$$\ln t = \frac{t-1}{1} - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3} - \frac{(t-1)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(t-1)^n}{n} + \ldots,$$
$$0 < t \le 2$$

$$\mathrm{e}^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots, -\infty < t < +\infty$$

$$(1+t)^{\mathrm{m}} = 1 + \frac{m}{1!} t + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} t^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(2n-1)!} + \ldots$$

- разложение имеет место: $m \ge 0, \quad \textit{если} \quad -1 \le t \le 1$

$$-1 < m < 0, \quad \textit{если} \quad -1 < t \le 1$$

$$m \le -1, \quad \textit{если} \quad -1 < t < 1$$

1. Применение рядов в приближённых вычислениях

Пример 1. Вычислить $\ln 0{,}8$ с точностью до 0,0001

РЕШЕНИЕ

Используем разложение функции $\ln(1+t)$

$$\ln(1+t)=\frac{t}{1}-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{t^n}{n}+\ldots,-1<t<+1$$

Согласно условию $1+t=0{,}8$

Следовательно, $t=-0{,}2$

Выполняется условие разложения:

$t=-0{,}2$ принадлежит области сходимости данного ряда $(-1;1]$

Подставим в формулу разложения функции $t=-0{,}2$

$$\ln 0{,}8=\ln(1-0{,}2)=\underbrace{-0{,}2}_{\substack{1-oe\\ \text{слагаемое}}}\underbrace{-\frac{(-0{,}2)^2}{2}}_{\substack{2-oe\\ \text{слагаемое}}}\underbrace{+\frac{(-0{,}2)^3}{3}}_{\substack{3-e\\ \text{слагаемое}}}\underbrace{-\frac{(-0{,}2)^4}{4}}_{\substack{4-oe\\ \text{слагаемое}}}\underbrace{+\frac{(-0{,}2)^5}{5}}_{\substack{5-oe\\ \text{слагаемое}}}-\ldots$$

- Рассмотрим каждое из этих слагаемых отдельно:

- 1-ое слагаемое: $\underline{-0{,}20000}$

$$\text{модуль} \quad 1-\text{го} \quad \text{слагаемого} \quad 0{,}20000 > \underbrace{0{,}0001}_{\substack{\text{предлагаемая} \\ \text{по условию} \\ \text{точность}}}$$

Поэтому ПЕРВОЕ СЛАГАЕМОЕ ОСТАВЛЯЕМ

ЗАМЕЧАНИЕ! Как только знак неравенства изменится на противоположный, то начнём члены ряда отбрасывать.

- 2-ое слагаемое:

$$-\frac{(-0,2)^2}{2} = -\frac{0,04}{2} = \underline{-0,02000} \quad \Rightarrow$$

$$\textit{модуль} \quad 2-\textit{го} \quad \textit{слагаемого} \quad 0,02000 > 0,0001$$

Поэтому ВТОРОЕ СЛАГАЕМОЕ ОСТАВЛЯЕМ

- 3-е слагаемое:

$$\frac{(-0{,}2)^3}{3} = -\frac{0{,}008}{3} \approx -\underline{0{,}00267}$$

$$\textit{модуль} \quad 3-\textit{го} \quad \textit{слагаемого} \quad 0{,}00267 > 0{,}0001$$

- Поэтому ТРЕТЬЕ СЛАГАЕМОЕ ОСТАВЛЯЕМ
- 4-е слагаемое:

$$-\frac{(-0{,}2)^4}{4} = -\frac{0{,}0016}{4} = -\underline{0{,}00040} \quad \Rightarrow$$

$$\textit{модуль} \quad 4-\textit{го} \quad \textit{слагаемого} \quad 0{,}00040 > 0{,}0001$$

- Поэтому ЧЕТВЁРТОЕ СЛАГАЕМОЕ ОСТАВЛЯЕМ

- 5-ое слагаемое:

$$\frac{(-0{,}2)^5}{5} = -\frac{0{,}00032}{5} \approx -0{,}00006$$

$$\textit{модуль} \quad 5-\textit{го} \quad \textit{слагаемого} \quad 0{,}00006 < 0{,}0001$$

- Начиная с этого слагаемого, все остальные члены ряда отбрасываем
- Суммируем полученные промежуточные результаты <u>с учётом знака</u>

2. Вычисление пределов

- В некоторых случаях при вычислении пределов для устранения неопределённости оказывается эффективной замена функции (или функций) степенными рядами

Пример 2. Вычислить предел с помощью разложения функции в ряд

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}$$

- Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}\textit{используем}\quad\textit{роазложение}\\ \cos t=1-\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^4}{4!}-\dfrac{t^6}{6!}+\ldots\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}\textit{согласно}\quad\textit{условию}\quad t=4x\\ \cos 4x=1-\dfrac{16x^2}{2}+\dfrac{256x^4}{24}-\ldots=\\ =1-8x^2+\dfrac{32}{3}x^4-\ldots\end{matrix}\right|$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+8x^2-\dfrac{32}{3}x^4+\ldots}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+8x^2-\dfrac{32}{3}x^4+\ldots}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2-\dfrac{32}{3}x^4+\ldots}{5x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{8}{5}x-\frac{32}{15}x^3+..\right)=0$$

$$\ln 0{,}8 = \ln(1-0{,}2) \approx -0{,}20000 - 0{,}02000 - 0{,}00267 -$$
$$- 0{,}00040 = -0{,}22307 \approx -0{,}2231$$

- **Замечание!** Промежуточные результаты округлены до пятого знака после запятой (т.е. на один разряд больше, чем предлагаемая по условию точность), а конечный ответ округлён до четвёртого знака, как требуется по условию задачи.
- **Ответ:** $\ln 0{,}8 \approx -0{,}2231$
- **Контроль (на МК): ln0,8=-0,22314…**

Пример 3. Вычислить с точностью до 0,0001 интеграл

$$\int_{0,1}^{0,2} \frac{\sin x^2}{x} dx$$

РЕШЕНИЕ

Используем разложение функции

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad -\infty < t < +\infty$$

Согласно условию $t = x^2$

- Подставим в формулу разложения функции $t = x^2$

$$\sin x^2 = \frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots$$

- Найдём подынтегральную функцию $\dfrac{\sin x^2}{x}$

$$\frac{\sin x^2}{x} = x - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{120}x^9 - \ldots$$

30.10.2020

- Заменили подынтегральную функцию степенным рядом (многочленом!):

$$\int_{0,1}^{0,2} \frac{\sin x^2}{x} dx \approx \int_{0,1}^{0,2} \left(x - \frac{1}{6} x^5 + \frac{1}{120} x^9 - .. \right) dx$$

- Находим первообразную:

$$\int_{0,1}^{0,2} \left(x - \frac{1}{6} x^5 + \frac{1}{120} x^9 - .. \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \Big|_{0,1}^{0,2} - \frac{1}{36} \cdot x^6 \Big|_{0,1}^{0,2} + \frac{1}{1200} \cdot x^{10} \Big|_{0,1}^{0,2} - \ldots$$

Вычисляем каждое слагаемое отдельно:

- 1-е слагаемое

$$\frac{1}{2}x^2\Big|_{0,1}^{0,2}=\frac{1}{2}\left(0,2^2-0,1^2\right)=0,015<0,0001$$

- ПЕРВОЕ СЛАГАЕМОЕ ОСТАВЛЯЕМ

- Второе слагаемое

$$\frac{1}{36}\cdot x^6\Big|_{0,1}^{0,2}=\frac{1}{36}\left(0{,}2^6-0{,}1^6\right)=0{,}00000175<0{,}0001$$

- Нужная точность достигнута уже на первой итерации – все остальные члены ряда отбрасываем

- Ответ: $\int_{0,1}^{0,2}\frac{\sin x^2}{x}dx\approx 0{,}015$

4. Решение ДУ с помощью рядов

Типовая задача формулируется следующим образом:

Найти приближённо частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию, в виде трёх *(реже – четырёх-пяти)* отличных от нуля членов ряда Тейлора.

Всякая функция, в данном случае частное решение ДУ, бесконечно дифференцируемая в интервале, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней ряд Тейлора:

В формуле вместо буквы «эф» используется «игрек»!

Искомое частное решение раскладывается в данный ряд по формуле:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

ПРЕЖДЕ ЧЕМ ПЕРЕЙТИ К КОНКРЕТНЫМ ПРИМЕРАМ, ПОВТОРИМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

$$(y^2)' = 2yy'$$

$$((y')^2)' = 2y' \cdot (y')' = 2y'y''$$

$$(e^y)' = e^y \cdot y'$$

$$(xy)' = (x)'y + x(y)' = y + xy'$$

$$(x^2y^3)' = (x^2)'y^3 + x^2(y^3)' = 2xy^3 + 3x^2y^2y'$$

$$(xy'')' = (x)'y'' + x(y'')' = y'' + xy'''$$

$$(x\sin y)' = (x)'\sin y + x(\sin y)' = \sin y + xy'\cos y$$

$$(y'''\cos x)' = (y''')'\cos x + y'''(\cos x)' = y^{IV}\cos x - y'''\sin x$$

Пример 4

- Найти приближённо частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$, в виде *четырёх первых* отличных от нуля членов ряда Тейлора.

30.10.2020

РЕШЕНИЕ

- По условию $x_0 = 0$, поэтому общая формула Тейлора трансформируется в частный случай **разложения - разложения в ряд Маклорена:**

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

- **По условию** $y(0) = 2$

- 1) Вычислим $y'(0)$

Так как $y' = -2y$, а $y(0) = 2$, тогда

$$y'(0) = -2 \cdot 2 = -4$$

- 2) Найдём вторую производную и вычислим $y''(0)$

$$y'' = (y')' = (-2y)' = -2y'$$

$$y''(0) = -2 \cdot y'(0) = -2 \cdot (-4) = 8$$

- 3) Найдём третью производную и вычислим $y'''(0)$

$$y''' = \left(y''\right)' = \left(-2y'\right)' = -2y''$$

$$y'''(0) = -2y''(0) = -2\cdot 8 = -16$$

30.10.2020

- 4) Теперь подставим найденные значения в формулу частного решения и аккуратно проведём упрощения:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$y(x) \approx 2 + \frac{(-4)}{1}x + \frac{8}{2}x^2 + \frac{(-16)}{6}x^3$$

- Ответ: $y(x) \approx 2 - 4x + 4x^2 - \frac{8}{3}x^3$

Приближенные вычисления значений функций с помощью степенных рядов.

Для вычисления приближенного значения функции f (x) в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n – конечная величина), а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности полученного приближенного значения необходимо оценить сумму отброшенных членов.

Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Если данный ряд знакочередующийся и его члены удовлетворяют признаку Лейбница, то используется оценка $|R_n| < |u_{n+1}|$, где $u_n + 1$ – первый из отброшенных членов ряда.

Для вычисления логарифмов эффективна формула

$$\ln(t+1) = \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \ldots\right]$$

Ряд в квадратных скобках сходится тем быстрее, чем больше t.

Ряд Тейлора

Методы разложения функций в ряд Тейлора

1. Метод, использующий формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
2. Метод подстановки.
3. Метод интегрирования.
4. Метод дифференцирования и др.

Применения степенных рядов

1. Приближенное вычисление значений функций.
2. Приближенное вычисление определенных интегралов.
3. Интегрирование дифференциальных уравнений.
4. Вычисление пределов.
5. Вычисление сумм числовых рядов и др.

Бер Л.М. Числовые и функциональные ряды
ГОУ ВПО НИ ТПУ Рег. № 190 от 17.06.10

Медицинские аспекты

- Разложение по функциям Чебышева-Эрмита (ряды Грамма-Шарлье) находит применение в медицине как для сопоставления результатов, так и для выявления скрытых особенностей (обработка изображений и речи).
- Разложение функций по базису wavelets (вейвлет-функция) используют для удаления ВЧ-составляющей сигнала, в том числе и в мед. приборах и аппаратах.