Лекция 10
Тема:
«Ряды Фурье-1»

План

Введение

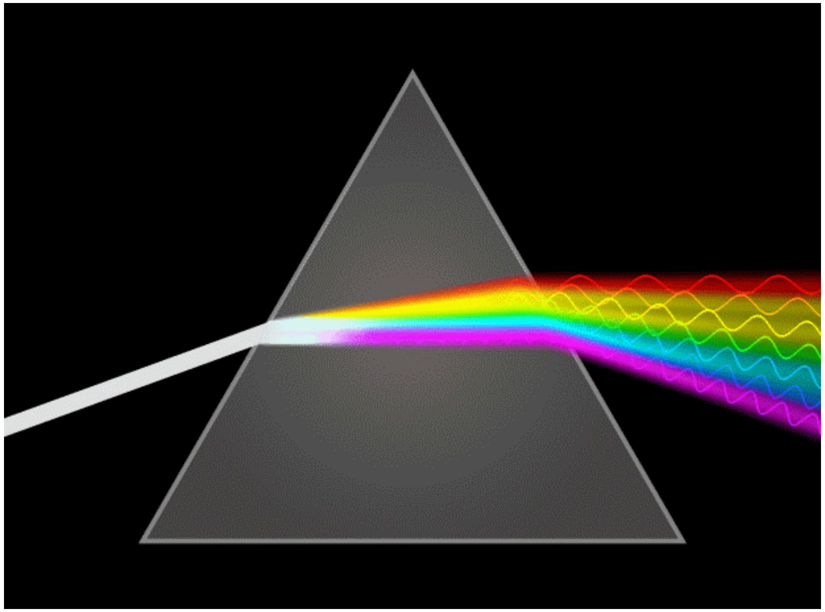
1. **Тригонометрические ряды**
2. **Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье**
3. **Условие сходимости ряда Фурье. Теорема Дирихле**
4. **Примеры разложения в ряд Фурье функций с периодом 2π**

Из истории науки

Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830)
фр. математик и физик
(Jean Baptiste Joseph Fourier)

Свои методы (ряды и интегралы Фурье) он использовал в теории распространения тепла. Но вскоре они стали исключительно мощным инструментом математического исследования самых разных задач — особенно там, где есть волны и колебания. А этот круг чрезвычайно широк — астрономия, акустика, теория приливов, радиотехника, электротехника и др.

- **Практически все сигналы в нашем мире состоят из суммы различных частот синусоидальных сигналов.**
- Например, 1) **видимый свет** представляет из себя электромагнитную волну. Каждый цвет - это электромагнитная волна определенной частоты.



- 2) **звук**. Проанализировав принимаемый сигнал, мы сможем определить, какие инструменты присутствуют на сцене.
- Примерно таким же образом устроены программы по распознаванию музыки.
- Прослушенная композиция раскладывается на составляющий спектр и сравнивается с уже известными.

- 3) В мобильных телефонах всей математической обработкой занимается один модуль системы на кристалле, который именуется **DSP (*Digital signal processor)*.**

03.11.2020

Вспомним

4.1. Гармонические колебания.

1. Простые гармонические колебания

В естествознании и технике часто наблюдаются периодические процессы, т.е. такие явления, которые повторяются через определенный промежуток времени. Например, колебания маятника, явления переменного тока и др.

Простейшее периодическое явление- гармоническое колебание, совершаемое по закону

$$y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

A- амплитуда колебания

$\omega t + \varphi_0$ - фаза колебания

ω - частота колебания $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T}$ - число колебаний за время 2π

φ_0 - начальная фаза

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - период колебания (время, в течение которого происходит одно колебательное движение)

Преобразуем равенство: $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A(\sin\omega t\cos\varphi_0 + \cos\omega t\sin\varphi_0) =$$
$$= \underbrace{A\cos\varphi_0}_{a}\sin\omega t + \underbrace{A\sin\varphi_0}_{b}\cos\omega t = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$

Т.е. $y = a\sin\omega t + b\cos\omega t$

- Колебательное движение, происходящее по закону $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ или, что то же, по закону $y = a\sin\omega t + b\cos\omega t$ называется простым гармоническим колебанием, а график его- простой гармоникой.

2. Сложные гармонические колебания

Не всякий периодический процесс можно рассматривать как простое гармоническое колебание. Очень часты случаи, когда периодическое явление есть результат сложения нескольких простых гармонических колебаний. Полученное результирующее движение называется сложным гармоническим колебанием, а график его-сложной гармоникой.

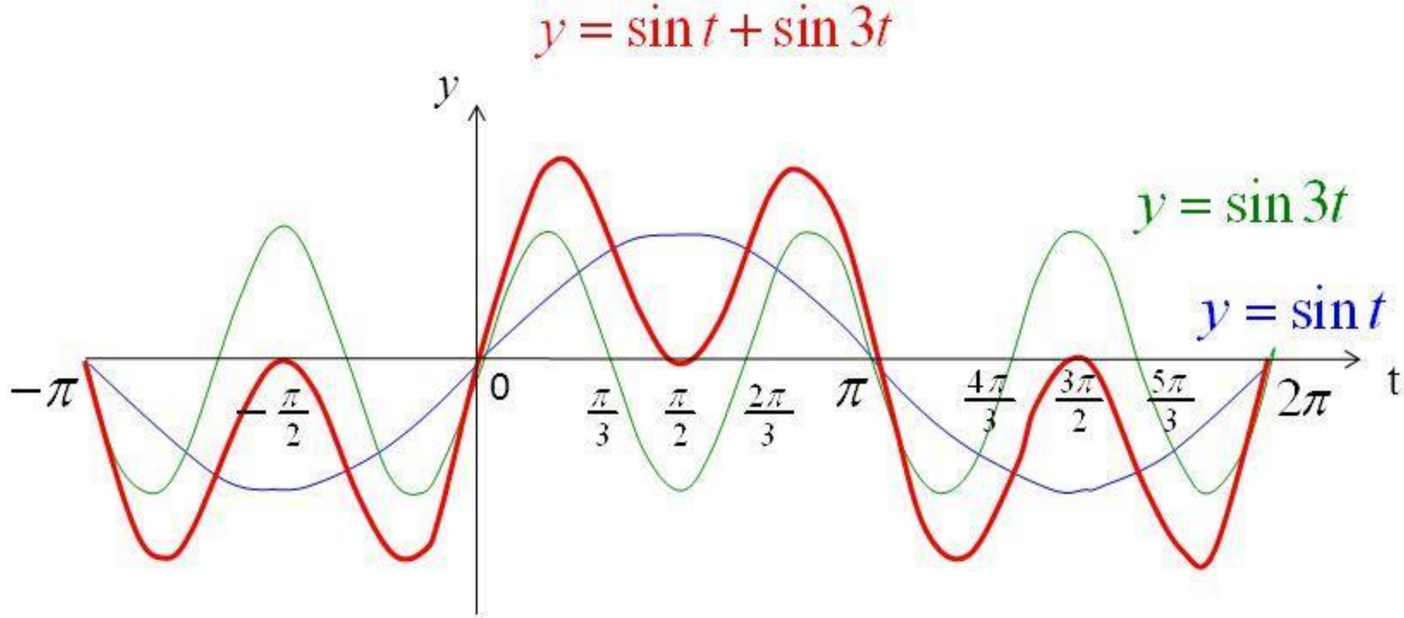
- Сложная гармоника есть результат сложения нескольких простых гармоник или иначе- результат *наложения* простых гармоник друг на друга.

Пример 1

Даны две простые гармоники: $y = \sin t$ и $y = \sin 3t$

Сложная гармоника: $y = \sin t + \sin 3t$

Любая точка сложной гармоники имеет ординату, равную сумме ординат точек, лежащих на простых гармониках и имеющих одну и ту же абсциссу.



При сложении простых гармоник с *разными частотами* получается сложная гармоника *не синусоидального вида*;

при сложении гармоник с *одинаковыми частотами*- гармоника *того же вида*, что и простая.

1. Тригонометрические ряды

- С помощью тригонометрического ряда любую (практически) периодическую функцию можно представить в виде ряда, членами которого являются простые гармоники:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t) + (a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t) + \ldots$$
$$\ldots + (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) + \ldots$$

- Здесь $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ - коэффициенты тригонометрического ряда

Упростим запись. Пусть $\omega t = x$

Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum\left(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx\right)$$

где $a_0,\quad a_n,\quad b_n=const\quad(n=1,2,..)$ - **коэффициенты тригонометрического ряда**.

Пусть $f(x)$- произвольная периодическая функция с периодом 2π. Предположим, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, т.е. $f(x)$ является суммой ряда:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

Так как функция $f(x)$ (и сумма ряда) имеет период 2π, то её можно рассматривать в любом промежутке длины 2π. В качестве основного промежутка возьмем отрезок $[-\pi;\pi]$. (также удобно взять отрезок $[0;2\pi]$). Предположим, что этот ряд абсолютно сходится, то его можно почленно интегрировать.

Найдем коэффициенты тригонометрического ряда:

2.Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье

4.3. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx$$

Вычислим отдельно каждый интеграл, встречающийся в правой части.

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2}(\pi + \pi) = a_0\pi$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{a_n}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_n}{n}\left(\underbrace{\sin\pi n}_{0} + \underbrace{\sin\pi n}_{0}\right) = 0$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{b_n}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{b_n}{n}(\cos\pi n - \cos\pi n) = 0$$

Следовательно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

Для вычисления остальных коэффициентов ряда нам понадобятся некоторые определенные интегралы:

Если n и k – целые числа, то имеют место следующие равенства:

если $\boldsymbol{n \neq k}$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = 0$$

если $\boldsymbol{n = k}$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin kx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Найдем a_n.

Умножим обе части тригонометрического ряда на cosnx:

$$f(x)\cos nx=\frac{a_0}{2}\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\cos nx$$

Проинтегрируем в пределах от –π до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}_{0}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx}_{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos nx\,dx}_{0}$$

Тогда получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = a_n\pi$$

Откуда

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

Найдем b_n.

Умножим обе части тригонометрического ряда на $\sin nx$:

$$f(x)\sin nx=\frac{a_0}{2}\sin nx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\sin nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\sin nx$$

Проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx}_{0}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin nx\,dx}_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx}_{\pi}$$

Тогда получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = b_n\pi$$

Откуда

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}$$

Ряд $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\,dx$$

коэффициенты Фурье

называется рядом Фурье функции $f(x)$

Дополнение

Иногда более удобны интегралы с пределами интегрирования от 0 до 2π:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{aligned}\right\} \text{коэффициенты Фурье}$$

<u>**Определение.**</u> **Рядом Фурье** для функции *f(x)* называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье.

Если ряд Фурье функции *f(x)* сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье.

3. Условие сходимости ряда Фурье. Теорема Дирихле

4.4. Разложение в ряд Фурье 2π- периодических функций

Сформулируем теорему, которая дает достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье (чтобы ряд Фурье функции $f(x)$ сходился и сумма построенного ряда Фурье равнялась значениям данной функции в соответствующих точках)

Теорема Дирихле.

Пусть 2π- периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;

2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т.е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

Теорема Дирихле (продолжение)

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x)=f(x)$;
2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева:

$$S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

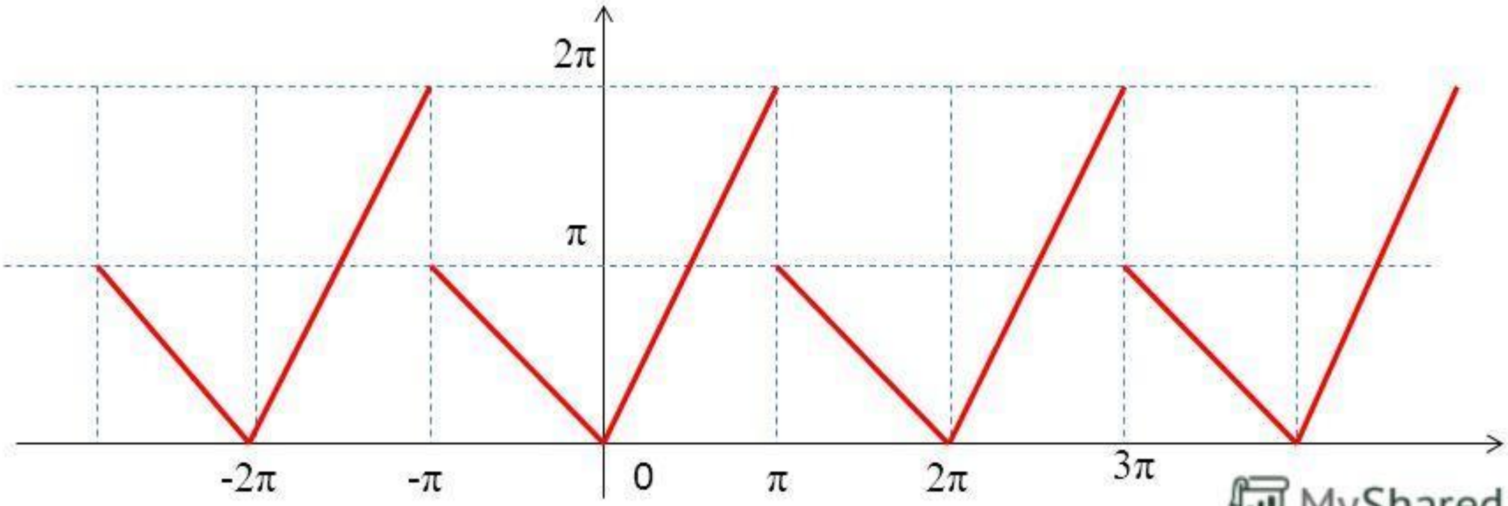
3. На концах отрезка $x=-\pi$ и $x=\pi$ сумма ряда равна

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

Пример 1

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$ формулой

$$f(x)=\begin{cases} 2x & при \quad 0\le x\le \pi \\ -x & при \quad -\pi\le x<0 \end{cases}$$



03.11.2020

То есть надо найти коэффициенты Фурье для заданной функции и записать её в виде ряда

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx
\end{aligned}\right\}$$

Решение Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\,dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2\pi}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{\pi}\Bigg|_{0}^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}\left(0-(-\pi)^2\right) + \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 - 0\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2\pi} + \frac{\pi^2}{\pi} = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = x & dv = \cos nx\,dx \\ du = dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx\right) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\underbrace{\left(0-(-\pi)\sin(-\pi)n\right)}_{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\underbrace{\left(\pi\sin\pi n - 0\right)}_{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}\left(\underbrace{\cos 0}_{1} - \cos \pi n\right) + \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos \pi n - \underbrace{\cos 0}_{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos \pi n - 2 + \cos \pi n - 1\right) = \frac{3}{\pi n^2}\left(\cos \pi n - 1\right)$$

Итак: $$a_n = \frac{3}{\pi n^2}\left(\cos \pi n - 1\right)$$

$$a_1 = \frac{3}{\pi}\left(\underbrace{\cos \pi}_{-1} - 1\right) = -\frac{6}{\pi}$$

$$a_2 = \frac{3}{\pi \cdot 2^2}\left(\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - 1\right) = 0$$

$$a_3 = \frac{3}{\pi \cdot 3^2}\left(\underbrace{\cos 3\pi}_{-1} - 1\right) = -\frac{6}{3^2 \pi}$$

$$a_4 = \frac{3}{\pi \cdot 4^2}\left(\underbrace{\cos 4\pi}_{1} - 1\right) = 0$$

$$a_5 = \frac{3}{\pi \cdot 5^2}\left(\underbrace{\cos 5\pi}_{-1} - 1\right) = -\frac{6}{5^2 \pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-x)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = x & dv = \sin nx\,dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = x & dv = \cos nx\,dx \\ du = dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n} x\cos nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0} \cos nx\, dx \right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n} x\cos nx \Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} \cos nx\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(0 - (-\pi)\cos(-\pi)n\right) + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sin nx \Big|_{-\pi}^{0}}_{0} \right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\left(\pi\cos\pi n - 0\right) + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sin nx \Big|_{0}^{\pi}}_{0} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\pi\cos\pi n - \frac{2}{\pi n}\pi\cos\pi n = -\frac{\cos\pi n}{n}$$

Итак: $$b_n = -\frac{\cos\pi n}{n}$$

$$b_1 = -\frac{\cos\pi}{1} = 1$$

$$b_2 = -\frac{\cos 2\pi}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$b_3 = -\frac{\cos 3\pi}{3} = \frac{1}{3}$$

$$b_4 = -\frac{\cos 4\pi}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$b_5 = -\frac{\cos 5\pi}{5} = \frac{1}{5}$$

$$b_6 = -\frac{\cos 6\pi}{6} = -\frac{1}{6}$$

Тогда $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=$$

$$=\frac{3\pi}{4}+\left(-\frac{6}{\pi}\cos x-\frac{6}{3^2\pi}\cos 3x-\frac{6}{5^2\pi}\cos 5x-\ldots\right)+$$

$$+\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots\right)=$$

$$=\frac{3\pi}{4}-\frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right)$$

Ответ.

$$f(x)=S(x)=\frac{3\pi}{4}-\frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)+$$

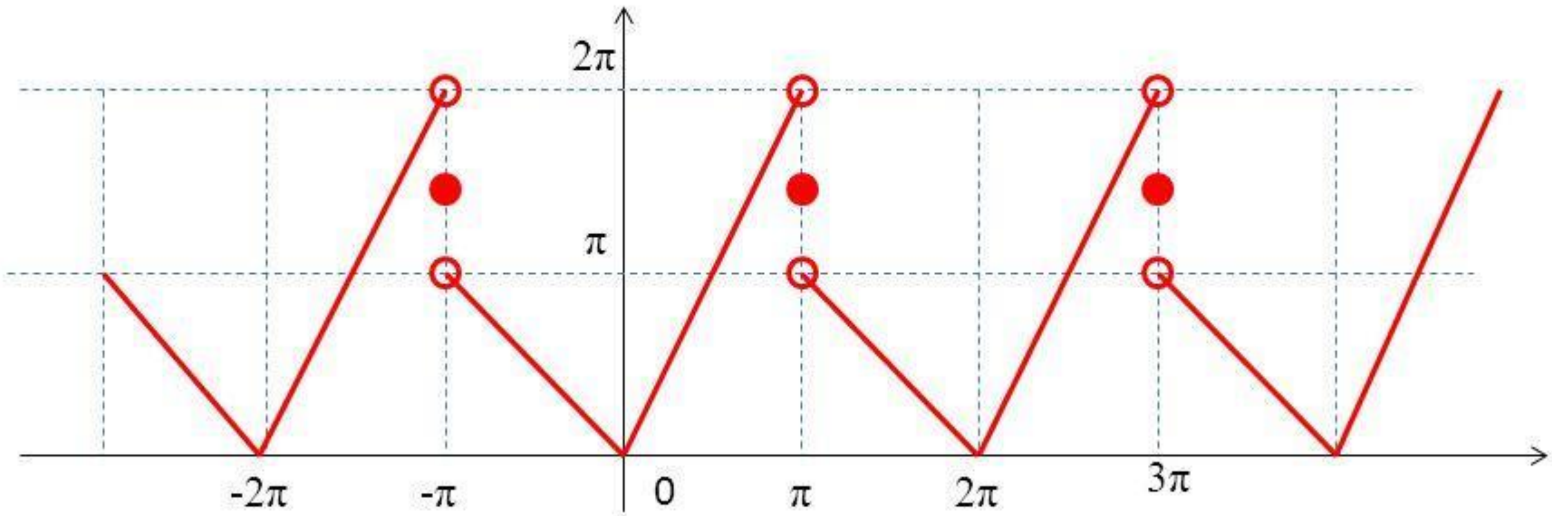
$$+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right)$$

Это равенство справедливо во всех точках, кроме точек разрыва. В точках $x=\mp\pi$

$$S(x)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi+2\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

Сумма $S(x)$ ряда на концах отрезка $x = \mp\pi$

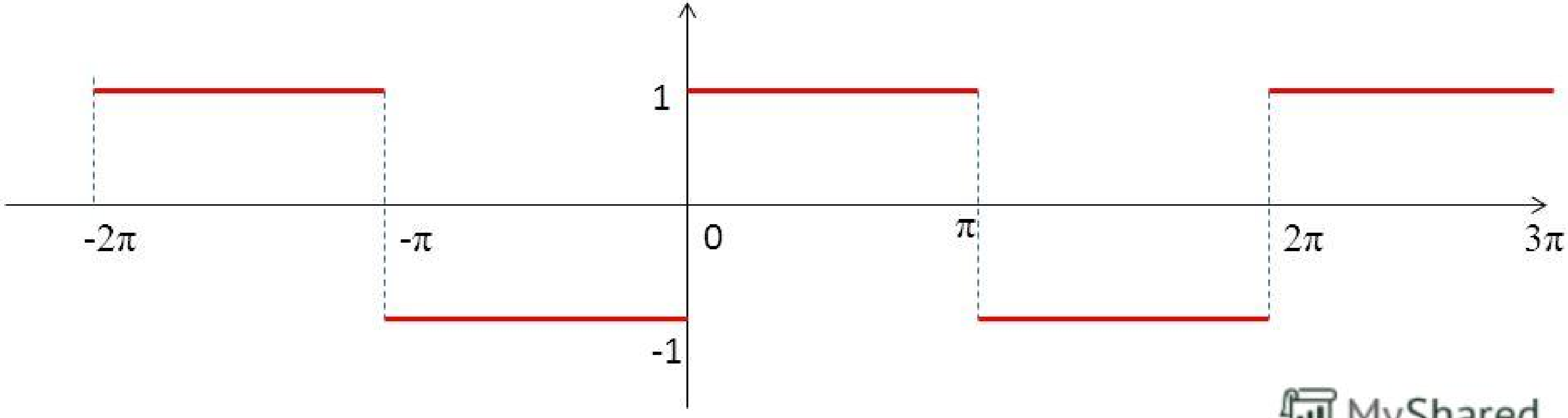
$$S(x) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi+2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$



Пример 2

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$ формулой

$$f(x)=\begin{cases}-1 & при \quad -\pi<x<0\\ 1 & при \quad 0\le x\le \pi\end{cases}$$



Решение Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx =$$

$$= -\frac{x}{\pi}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{x}{\pi}\Bigg|_{0}^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\big(0-(-\pi)\big) + \frac{1}{\pi}(\pi - 0) = -1+1=0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\underbrace{\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}}_{0} + \frac{1}{\pi n}\underbrace{\sin nx\Big|_{0}^{\pi}}_{0} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(\underbrace{\cos 0}_{1} - \cos \pi n\right) - \frac{1}{\pi n}\left(\cos \pi n - \underbrace{\cos 0}_{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(\underbrace{\cos 0}_{1} - \cos \pi n\right) - \frac{1}{\pi n}\left(\cos \pi n - \underbrace{\cos 0}_{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}(1 - \cos \pi n - \cos \pi n + 1) = \frac{2}{\pi n}(1 - \cos \pi n)$$

Итак: $$b_n = \frac{2}{\pi n}\left(1-\cos \pi n\right)$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\left(1-\underbrace{\cos \pi}_{-1}\right) = \frac{4}{\pi}$$

$$b_2 = \frac{2}{2\pi}\left(1-\underbrace{\cos 2\pi}_{1}\right) = 0$$

$$b_3 = \frac{2}{3\pi}\left(1-\cos 3\pi\right) = \frac{4}{3\pi}$$

$$b_4 = \frac{2}{4\pi}\left(1-\underbrace{\cos 4\pi}_{1}\right) = 0$$

$$b_5 = \frac{2}{5\pi}\left(1-\underbrace{\cos 5\pi}_{-1}\right) = \frac{4}{5\pi}$$

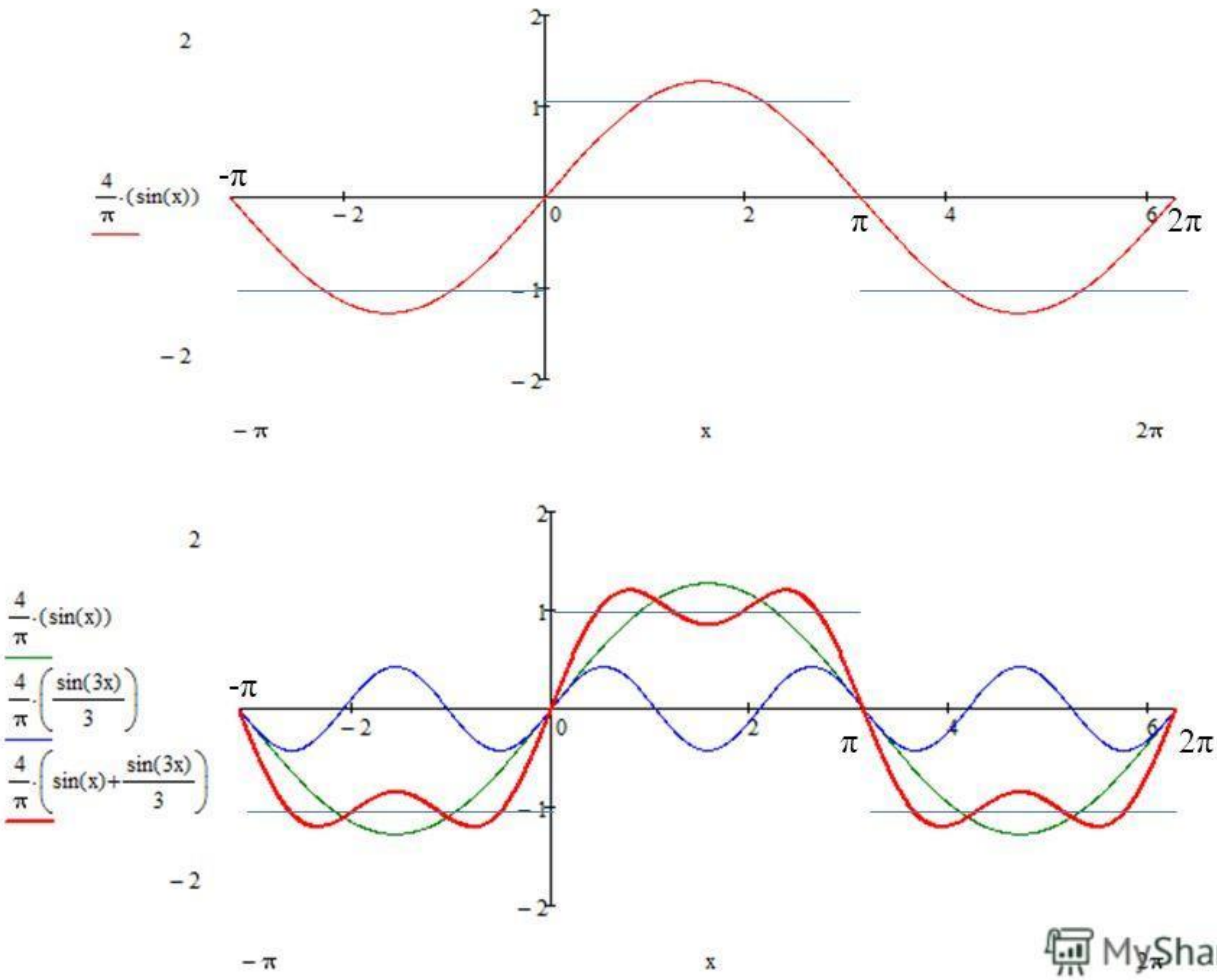
$$b_6 = \frac{2}{6\pi}\left(1-\cos 6\pi\right) = 0$$

Тогда $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=$$

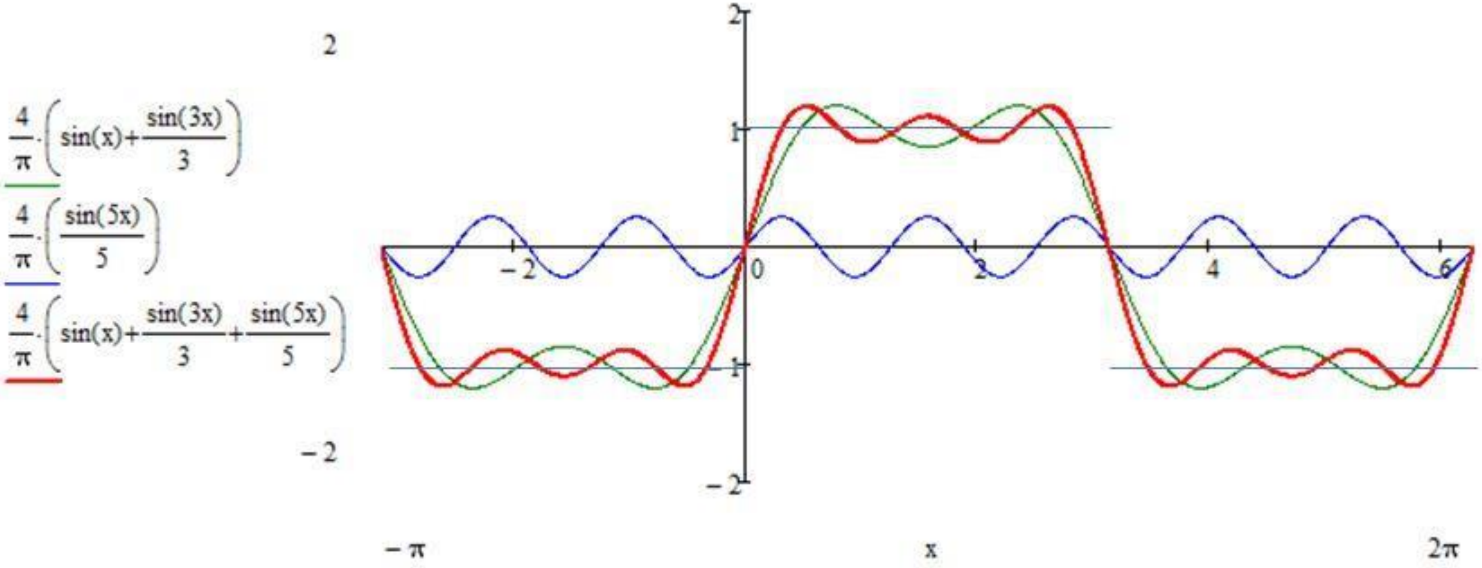
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{3\pi}\sin 3x+\frac{4}{5\pi}\sin 5x+\ldots=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)$$



2
-π
4/π·(sin(x))
−2
0
2
4
6
π
2π
1
−1
x
4/π·(sin(3x)/3)
4/π·(sin(x)+sin(3x)/3)



Чем больше простых гармоник сложим, тем точнее результирующая гармоника будет представлять функцию $f(x)$.

Ответ.

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

Это равенство справедливо во всех точках, кроме точек разрыва. В каждой точке разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому её пределов справа и слева, т.е. нулю.

Задание к Лекции.

Пример 3

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$ формулой

$$f(x) = x^2$$