Лекция 11
Тема:
«Ряды Фурье-2»

План

Введение

1. **Разложение функции в ряд Фурье на произвольном периоде**
2. **Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций**
3. **Конспект темы «Ряды Фурье»**
4. **Примеры решения задач**

Введение

- *Двойную спираль ДНК, циклы солнечной активности и сложные электронные сигналы математически можно представить в виде ряда волнообразных кривых.*
- *Эта идея лежит в основе мощного аналитического инструмента, название которого* ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

- **П**реобразование Фурье вычисляется всякий раз, когда мы слышим звук. Ухо автоматически выполняет вычисление, проделать которое наш сознательный ум способен лишь после нескольких лет обучения математике.
- Наш орган слуха строит преобразование, представляя звук — колебательное движение частиц упругой среды, распространяющееся в виде волн в газообразной, жидкой или твёрдой средах — в виде спектра последовательных значений громкости для тонов различной высоты.
- Мозг превращает эту информацию в воспринимаемый звук.

- Преобразование Фурье — это функция, описывающая амплитуду и фазу каждой синусоиды, соответствующей определённой частоте.

Вспомним

- **Определение ряда Фурье**

Пусть $f(x)$ - функция с периодом 2π, имеющая на сегменте $[-\pi;\pi]$ не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируемая на этом сегменте (тогда она будет интегрируема на любом сегменте).

Рядом Фурье этой функции называется ряд:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$, где $n=0,1,2,\ldots\ \Rightarrow\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\text{ где } n=1,2,\ldots$$

При этом пишут $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

Не исключено, что ряд Фурье (даже при непрерывности $f(x)$) может оказаться расходящимся в бесчисленном множестве точек на промежутке $(-\pi;\pi)$. Поэтому в последней записи пишут не знак равно «=», а знак тильда «~».

Однако <u>для всех практически важных непрерывных функций задача имеет решение</u>, т.е. ряд Фурье непрерывной периодической функции $f(x)$ на практике оказывается всюду сходящимся и его сумма равна данной функции, а не какой-либо другой.

Важно! *Из определения ряда Фурье не следует, что функция* $f(x)$ *должна в него разлагаться, а следует то, что если некоторая функция допускает разложение в равномерно сходящийся ряд, то этот ряд будет её рядом Фурье.*

Не исключено, что ряд Фурье (даже при непрерывности $f(x)$) может оказаться расходящимся в бесчисленном множестве точек на промежутке $(-\pi;\pi)$. Поэтому в последней записи пишут не знак равно «=», а знак тильда «~».

Однако <u>для всех практически важных непрерывных функций задача имеет решение</u>, т.е. ряд Фурье непрерывной периодической функции $f(x)$ на практике оказывается всюду сходящимся и его сумма равна данной функции, а не какой-либо другой.

Важно! *Из определения ряда Фурье не следует, что функция* $f(x)$ *должна в него разлагаться, а следует то, что если некоторая функция допускает разложение в равномерно сходящийся ряд, то этот ряд будет её рядом Фурье.*

1. Разложение функции в ряд Фурье на произвольном периоде

Пусть функция $f(x)$, определённая на отрезке $[-l;l]$, имеет период $2l$.

То есть $f(x+2l)=f(x)$, где l - положительное число и эта функция удовлетворяет условиям теоремы о разложении в ряд Фурье (условиям теоремы Дирихле)

Рядом Фурье этой функции называется ряд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l},$$

где $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,$$ где $n=0,1,2,...$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$ где $n=1,2,...$

2. Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций

С чётными и нечётными функциями процесс решения задачи заметно упрощается.

Вернёмся к разложению функции в ряд Фурье на периоде «два пи»

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и произвольном периоде «два эль»

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l})$$

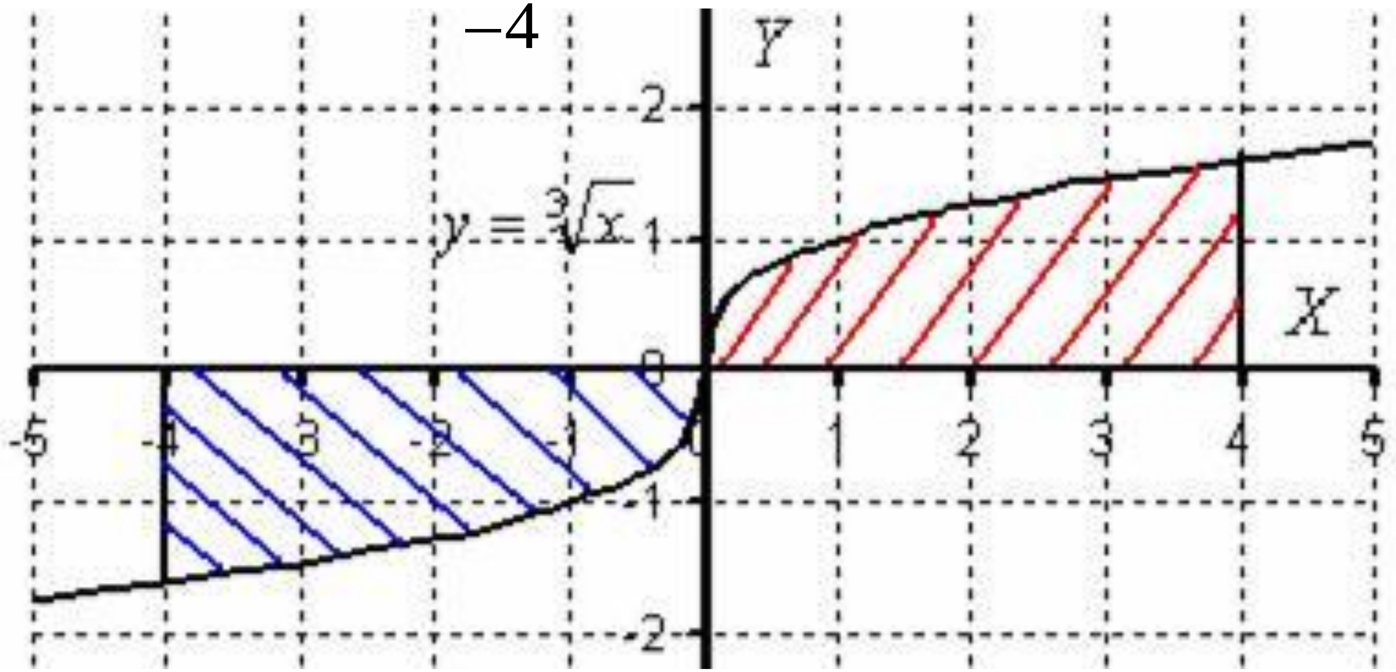
Вспомним особые случаи вычисления ОИ

1) Интеграл от нечётной функции в симметричных пределах (от **-а** до **а**) равен нулю, т.е.

$$\int_{-a}^{a} (\textit{нечётная} \quad \textit{функция})dx = 0$$

Интеграл от нечётной функции

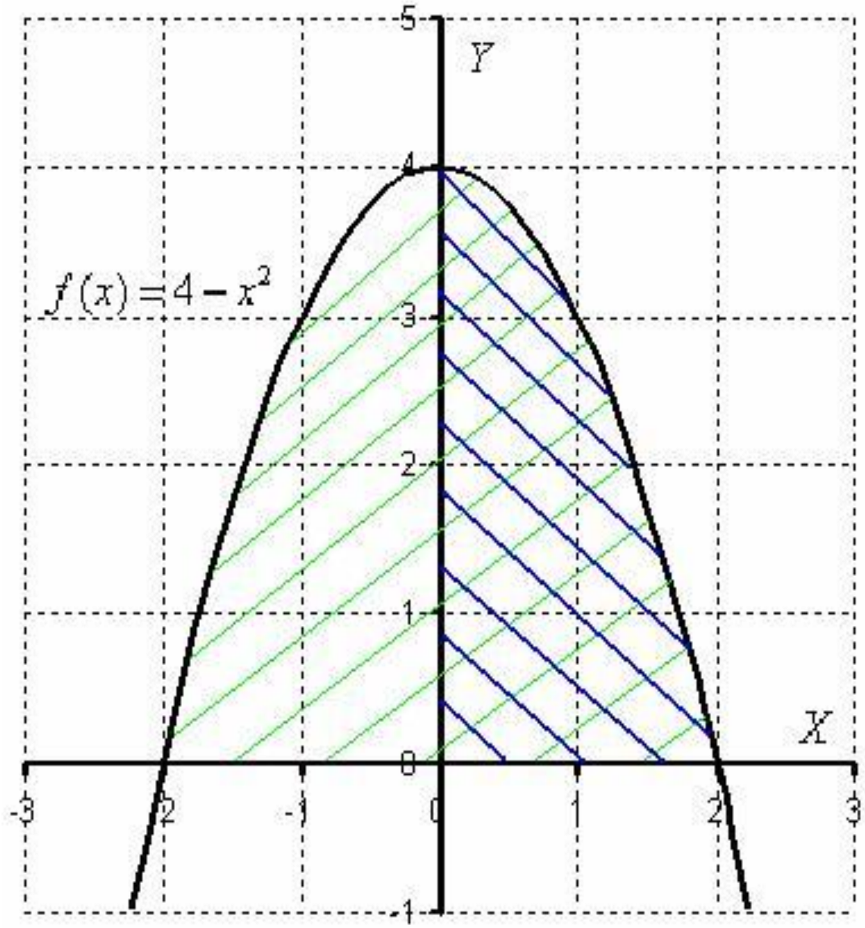
$$\int_{-4}^{4} \sqrt[3]{x}\,dx = 0$$



2) Интеграл от чётной функции в симметричных пределах (от **-а** до **а**) равен удвоенному значению определённого интеграла с пределами от 0 до от этой чётной функции, т.е.

$$\int_{-a}^{a} (\textit{чётная} \quad \textit{функция})dx = 2\int_{0}^{a} (\textit{чётная} \quad \textit{функция})dx$$

Интеграл от чётной функции



Ряд Фурье для нечётных функций

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \\
a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \\
b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx
\end{aligned}\right\}$$

- Коэффициенты

$$a_0 = 0 \quad и \quad a_n = 0$$

Ряд Фурье для нечётной функции имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\ a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin \frac{n\pi x}{l}\,dx \end{aligned}\right\}$$

Ряд Фурье для чётных функций

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \\ a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \end{aligned}\right\}$$

- Коэффициент $b_n = 0$
- Вычисление коэффициентов a_0 и a_n упрощается

Ряд Фурье для чётной функции

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \\ a_0 &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx \\ a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ b_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ b_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$