4. Примеры решения задач

Пример 1:

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=1-2x$, на отрезке $[-1;1]$.

Решение.

Функция $f(x)=1-2x$ является функцией общего вида. По условию предлагается разложить функцию на отрезке $[-1;1]$. Эти два утверждения указывают на то, что мы должны применить формулы (1а) из опорного конспекта темы «Разложение в ряд Фурье непрерывных функций»:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\\ a_0&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx\\ a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \end{aligned}\right\}(1a)$$

Найдём a_0:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{(1-2x)}_{f(x)}dx = \int_{-1}^{1} dx - 2\underbrace{\int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{нечёт.} dx}_{\substack{=0 \\ (см.\ полезн. \\ информ.\ №2)}} = \int_{-1}^{1} dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} \underbrace{1}_{чёт.} dx}_{\substack{(см.\ полезн. \\ информ.\ №2)}} =$$

$$= 2\int_0^1 dx = 2x\Big|_0^1 = 2$$

Получили:

$$\boxed{a_0 = 2} \qquad (2)$$

Найдём a_n:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{(1-2x)}_{f(x)}\cos\frac{n\pi x}{1}dx = \int_{-1}^{1}(1-2x)\cos n\pi x dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{\cos n\pi x}_{чёт.}dx - 2\int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{x}_{нечёт.} \underbrace{\cos n\pi x}_{чёт.}}_{нечёт.}dx = \left| \begin{matrix} см.\ полезную \\ информацию \\ №1\ и\ №2 \end{matrix} \right| = 2\int_0^1 \cos n\pi x dx -$$

$$-2\underbrace{\int_{-1}^{1} \underbrace{x\cos n\pi x}_{нечёт.}dx}_{=0} = 2\int_0^1 \cos n\pi x dx = \frac{2}{\pi n}\sin n\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi n}(\underbrace{\sin n\pi}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}) = 0$$

Получили:

$$\boxed{a_n = 0} \qquad (3)$$

Найдём b_n:

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{(1-2x)}_{f(x)}\sin n\pi x dx = \int_{-1}^{1}(1-2x)\sin n\pi x dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{\sin n\pi x}_{нечёт.}dx - 2\int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{x}_{нечёт.} \underbrace{\sin n\pi x}_{нечёт.}}_{чёт.}dx = \left| \begin{matrix} см.\ полезную \\ информацию \\ №1\ и\ №2 \end{matrix} \right| = \underbrace{\int_{-1}^{1} \underbrace{\sin n\pi x}_{нечёт.}dx}_{=0} -$$

$$-2\cdot 2\int_0^1 x\sin n\pi x dx = -4\int_0^1 x\sin n\pi x dx = \left| \begin{matrix} см.\ полезную \\ информацию \\ №3 \end{matrix} \right| = -4[\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x -$$

$$-\frac{1}{n\pi}x\cos n\pi x]_0^1=-4[\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi-\frac{1}{n\pi}x\cos n\pi-\underbrace{\frac{1}{n^2\pi^2}\sin 0}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{n\pi}0\cdot\cos 0}_{=0}]=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{см. полезную}\\ \textit{информацию}\\ \textit{№4}\end{matrix}\right|=-4[\frac{1}{n^2\pi^2}\underbrace{\sin n\pi}_{=0}-\frac{1}{n\pi}x\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}]=\frac{4}{n\pi}(-1)^n$$

Получили:

$$\boxed{b_n=\frac{4}{n\pi}(-1)^n} \qquad (4)$$

Подставляем (2), (3), (4) в первую из формул (1а):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})=\frac{2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(0\cdot\cos\frac{n\pi x}{1}+\frac{4}{n\pi}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{1})=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(-1)^n\sin n\pi x=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin n\pi x$$

Получили, что:

$$f(x)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin n\pi x \qquad (5)$$

Вычислим несколько, например четыре, первых отличных от нуля членов ряда и результаты оформим в виде таблицы:

Первое слагаемое – это 1 (см. (5))	—
$n=1$	$\frac{(-1)^n}{n}\sin n\pi x=-\sin\pi x$
$n=2$	$\frac{(-1)^n}{n}\sin n\pi x=\frac{1}{2}\sin 2\pi x$
$n=3$	$\frac{(-1)^n}{n}\sin n\pi x=-\frac{1}{3}\sin 3\pi x$
и т.д.	и т.д.

Полученные результаты подставим в (5):

$$\boxed{f(x)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin n\pi x=1+\frac{4}{\pi}[-\sin\pi x+\frac{1}{2}\sin 2\pi x-\frac{1}{3}\sin 3\pi x+...]}$$

Ответ: разложение функции $f(x)=1-2x$ в ряд Фурье на отрезке $[-1;1]$ выглядит следующим образом:

$$f(x)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin n\pi x=1+\frac{4}{\pi}[-\sin\pi x+\frac{1}{2}\sin 2\pi x-\frac{1}{3}\sin 3\pi x+...]$$

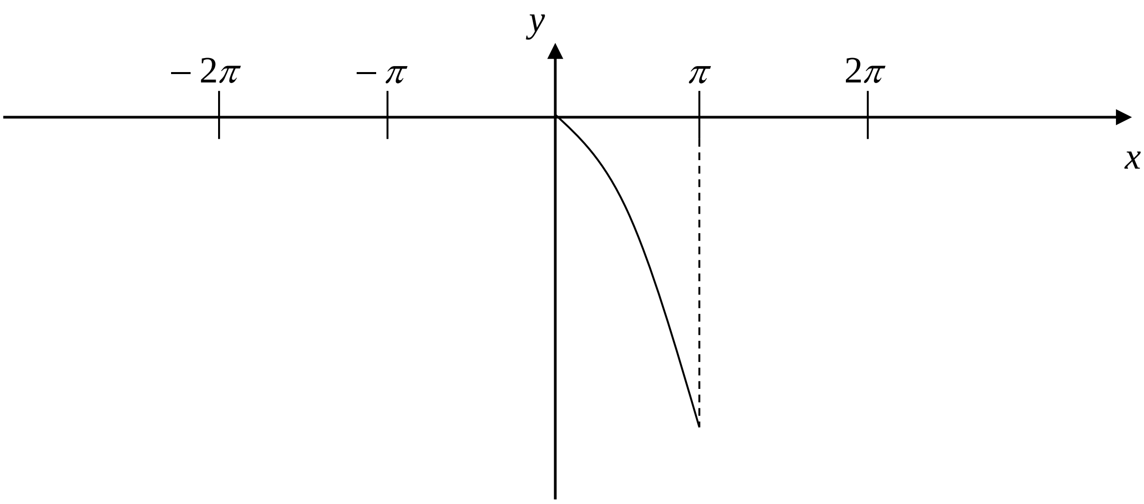
Пример 2:

Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=-x^2$, на отрезке $[0;\pi]$.

Решение.

В данном примере разложение предлагается проделать на отрезке, который не является симметричным относительно нуля, поэтому **не** имеет значения, является ли функция $f(x)=-x^2$ чётной, нечётной или общего вида.

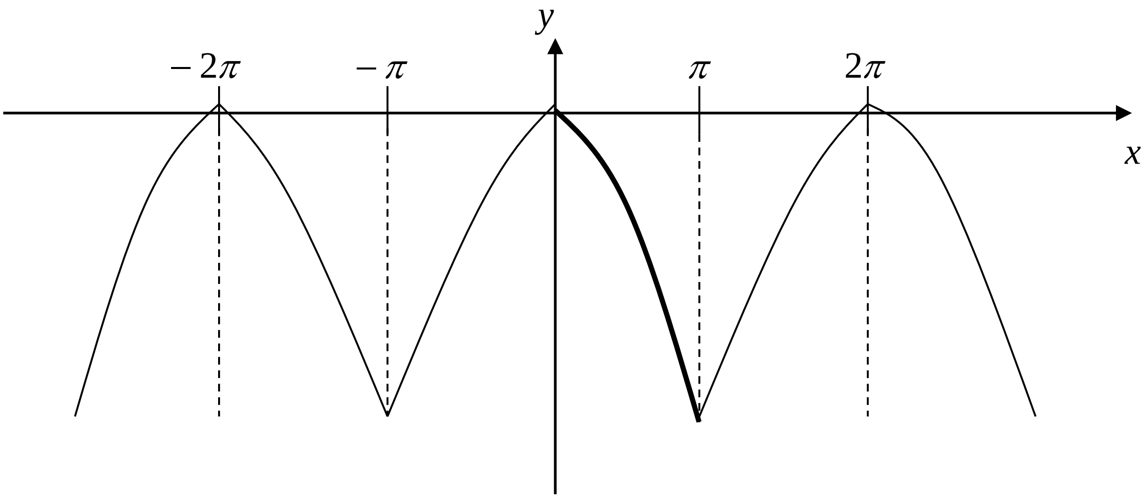
График функции $f(x)=-x^2$ на отрезке $[0;\pi]$ выглядит следующим образом:



Т.к. по условию задачи требуют разложить по косинусам на отрезке $[0;\pi]$, то в решении будем применять формулы (2б) из опорного конспекта темы «Разложение в ряд Фурье непрерывных функций»:

$$\left.\begin{array}{c} f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx \\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx \\ b_n=0 \end{array}\right\}(2b)$$

Разложение по косинусам соответствует чётному доопределению данной функции, которое показано на рисунке:



Найдём a_0:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{(-x^2)}_{f(x)}dx = \left(-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = -\frac{2}{3}\pi^2$$

Получили:

$$\boxed{a_0 = -\frac{2}{3}\pi^2} \qquad (6)$$

Найдём a_n:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{(-x^2)}_{f(x)}\cos nx dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx dx = \left|\begin{matrix}\textit{см. полезную}\\ \textit{информацию}\\ №3\end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{n^3}\sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx + \frac{1}{n}x^2\sin nx\right)\Bigg|_0^{\pi} = \left|\begin{matrix}\textit{см. полезную}\\ \textit{информацию}\\ №4\end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{-\frac{2}{n^3}\sin n\pi}_{=0} + \frac{2}{n^2}\pi\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} + \underbrace{\frac{1}{n}\pi^2\sin n\pi}_{=0} + \underbrace{\frac{2}{n^3}\sin 0n}_{=0} + \underbrace{\frac{2}{n^2}\cdot 0\cdot\cos 0n}_{=0} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{n}\cdot 0^2\cdot\sin 0n}_{=0}\Big) = = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n^2}\pi(-1)^n\right) = -(-1)^n\frac{4}{n^2} = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}$$

Получили:

$$\boxed{a_n = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}} \qquad (7)$$

Согласно формулам (2b): $\boxed{b_n = 0}$ (8)

Подставляем (6), (7), (8) в первую из формул (2b):

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\pi^2\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos nx + 0\cdot\sin nx\right) = -\frac{1}{3}\pi^2 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos nx = -\frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

Получили, что:

$$f(x) = -\frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx \qquad (9)$$

Вычислим несколько, например, четыре первых отличных от нуля членов ряда и результаты оформим в виде таблицы:

Первое слагаемое – это $-\frac{1}{3}\pi^2$ (см. (9))	—
$n=1$	$\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx = \cos x$
$n=2$	$\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx = -\frac{1}{4}\cos 2x$
$n=3$	$\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx = \frac{1}{9}\cos 3x$
и т.д.	и т.д.

Полученные результаты подставим в (9):

$$f(x) = -\frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx = -\frac{1}{3}\pi^2 + 4\left(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \ldots\right)$$

Ответ: разложение в ряд Фурье по косинусам функции $f(x) = -x^2$ на отрезке $[0;\pi]$ выглядит следующим образом:

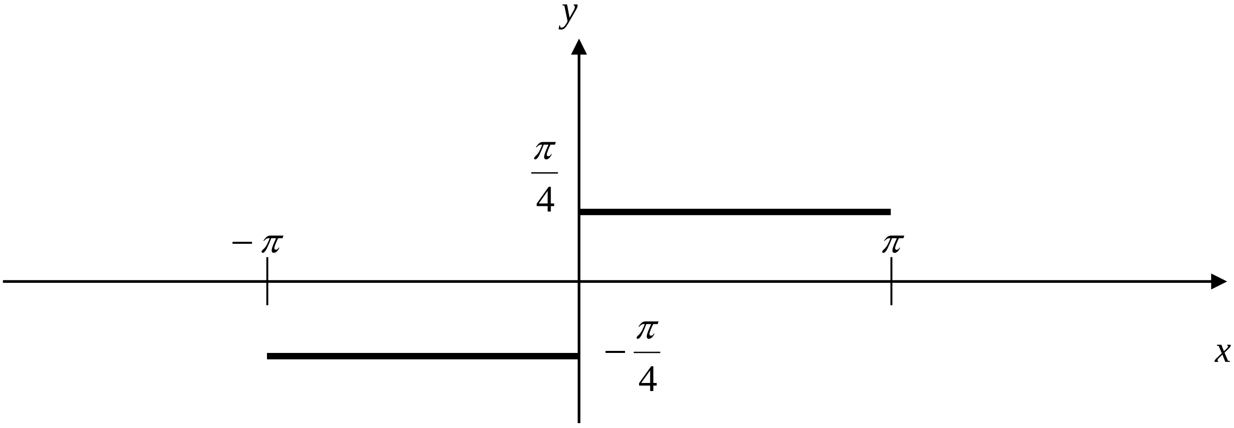
$$f(x) = -\frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx = -\frac{1}{3}\pi^2 + 4\left(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \ldots\right)$$

Пример 3

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi \le x < 0 \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$.

Решение.

Построим график функции $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi \le x < 0 \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$.



Видно, что предложенная функция является нечётной. Отрезок, на котором рассматривается данная функция – это отрезок $[-\pi;\pi]$. Эти два утверждения указывают на то, что мы должны применить формулы (2в) из конспекта темы «Разложение в ряд Фурье непрерывных функций»:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{aligned}\right\}(2в)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{f(x)} \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2n}(\cos n\pi - \underbrace{\cos 0}_{=1}) = \left| \begin{matrix} \textit{см. полезную} \\ \textit{информацию} \\ \textit{№4} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2n}(\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} - 1) = -\frac{1}{2n}((-1)^n - 1) =$$

$$=\frac{1}{2n}((-1)^{n+1}+1)$$

Получили, что $b_n=\frac{1}{2n}((-1)^{n+1}+1)$, тогда:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx \qquad (10)$$

Вычислим несколько, например, четыре, первых отличных от нуля членов ряда и результаты оформим в виде таблицы:

$n=1$	$\frac{1}{n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx=2\sin x$	$n=5$	$\frac{1}{n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx=\frac{2}{5}\sin 5x$
$n=2$	$\frac{1}{n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx=0$	$n=6$	$\frac{1}{n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx=0$
$n=3$	$\frac{1}{n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx=\frac{2}{3}\sin 3x$	$n=7$	$\frac{1}{n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx=\frac{2}{7}\sin 7x$
$n=4$	$\frac{1}{n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx=0$	и т.д.	и т.д.

Полученные результаты подставим в (10):

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx=\frac{1}{2}(2\sin x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{2}{5}\sin 5x+\frac{2}{7}\sin 7x+...)=$$

$$=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+...$$

Получили:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+...}$$

Графическая иллюстрация полученного разложения выглядит следующим образом:

Ответ: разложение функции $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4}, & -\pi\le x<0\\ \frac{\pi}{4}, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ в ряд Фурье выглядит следующим образом:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}((-1)^{n+1}+1)\sin nx=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+...$$