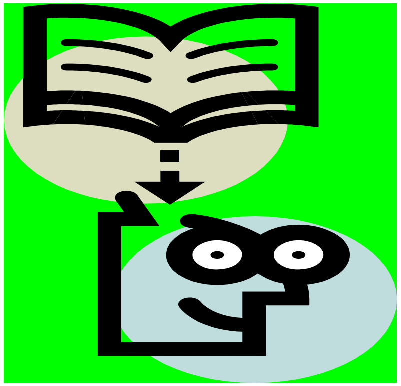


Лекция 12

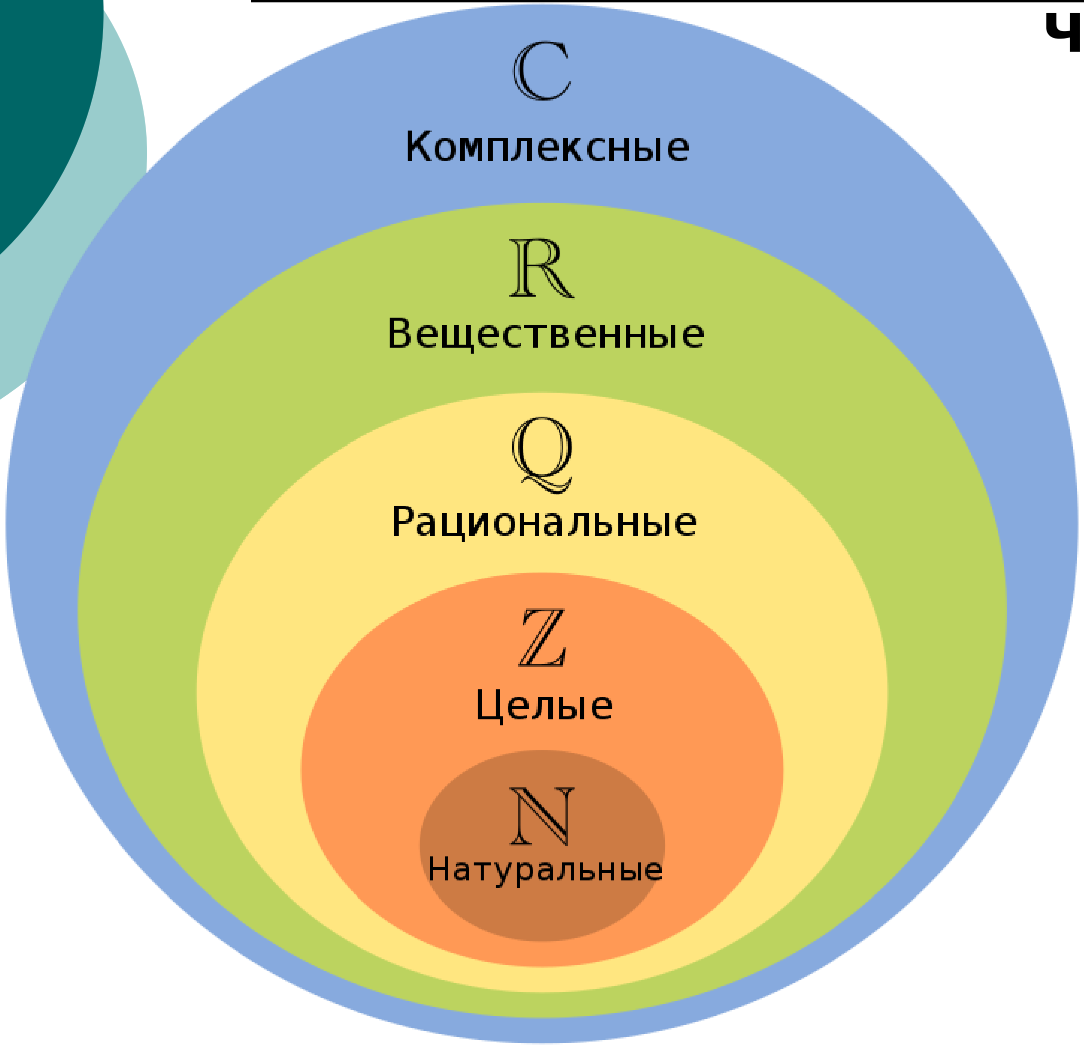
Тема: Теория функции комплексной переменной: КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Дух Божий нашёл тончайшую отдушину в этом ЧУДЕ анализа,
УРОДЕ из мира идей,
двойственной сущности, находящейся между бытием и небытием,
которую мы называем мнимым корнем из отрицательной единицы

Лейбниц

Введение

○ Иерархия чисел



Число — одно из основных понятий математики, используемое для количественной характеристики, сравнения, нумерации объектов и их частей.

«Натуральные числа создал Господь,

а остальное – дело человека»

Кронекер

План

1. **Алгебраическая форма комплексного числа. Геометрическая модель. Действия над комплексными числами**
2. **Тригонометрическая форма комплексного числа.**

   Действия над комплексными числами. Формула Муавра
3. **Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера.**
4. **Примеры решения задач**

История

Впервые ***мнимые величины*** появились в известном труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» Кардано (1545), который счёл их ***непригодными*** к употреблению.

Пользу мнимых величин, в частности, при решении кубического уравнения, впервые оценил Бомбелли (1572). Он же дал некоторые простейшие правила действий с комплексными числами.

Выражения вида $a+b\sqrt{-1}$, появляющиеся при решении квадратных и кубических уравнений, стали называть «мнимыми» в XVI—XVII веках, однако даже для многих крупных ученых XVII века алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной.

Задача о выражении корней степени *n* из мнимого числа была решена в работах Муавра (1707) и Котса (1722).

Символ $i=\sqrt{-1}$ **предложил Эйлер** (1777, опубл. 1794), взявший для этого первую букву слова лат. ***imaginarius*****.**

Комплексным числом называется выражение вида $z = a + b \cdot i$, в котором **a** и **b** – действительные числа, а **i** – некоторый символ такой, что $i^2 = -1$

Действительное число ***a*** называется действительной частью комплексного числа (***Re*** z), а число ***b*** - мнимой частью (***Im*** z) этого числа

Комплексное число $z = a + b \cdot i$ изображают точкой комплексной плоскости с координатами (a;b)

Точка **M(a;b)**, соответствующая комплексному числу

$z = a + b \cdot i$, называется ***аффиксом*** данного числа

Алгебраическая модель комплексных чисел как пар вещественных чисел была построена Гамильтоном (1837)

Алгебраическая форма

$$z = a + b \cdot i \qquad i^2 = -1$$

- **Замечание:**

1)если $a = \operatorname{Re} z = 0$, то число Z будет чисто мнимым

2)если $b = \operatorname{Im} z = 0$,то число Z будет действительным

Два комплексных числа $z = a + b \cdot i$ и $z = a - b \cdot i$ называются ***комплексно-сопряжёнными***

Два комплексных числа $z = a_1 + b_1 \cdot i$ и $z = a_2 + b_2 \cdot i$ называются ***равными,*** если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$

Комплексное число равно нулю, если равны нулю действительная и мнимая части: $a = 0, \quad b = 0$

Также комплексные числа можно записывать: 1) $z = x + y \cdot i$ 2) $z = u + v \cdot i$

Классификация комплексных чисел

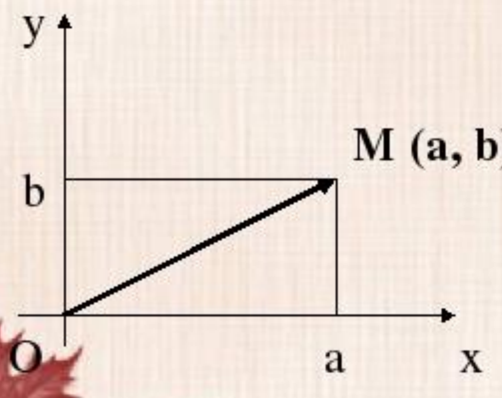
- **Комплексные числа** $a + bi$
  - **Действительные числа** $b = 0$
    - **Рациональные числа**
    - **Иррациональные числа**
  - **Мнимые числа** $b \neq 0$
    - **Мнимые числа с ненулевой действительной частью** $a \neq 0,\ b \neq 0.$
    - **Чисто мнимые числа** $a = 0,\ b \neq 0.$

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Комплексному числу z на координатной плоскости соответствует точка M(a, b).

Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы $\overrightarrow{OM}$

Определение: **Модулем** комплексного числа $z = a + bi$ называют неотрицательное число $\sqrt{a^2 + b^2}$, равное расстоянию от точки M до начала координат $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad и \quad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ϕ - *аргумент комплексного числа*

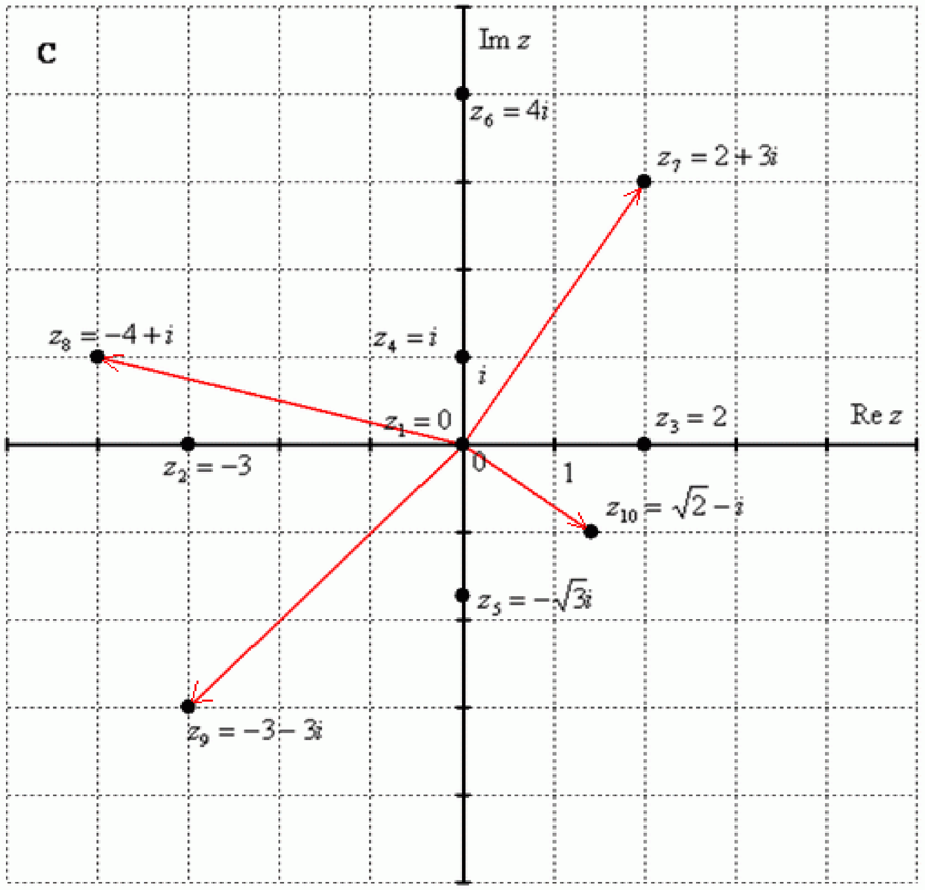
$\phi \in (-\pi; \pi]$

Построить на комплексной плоскости числа:

$z_1 = 0$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2$

$z_4 = i$, $z_5 = -\sqrt{3}i$, $z_6 = 4i$

$z_7 = 2 + 3i$, $z_8 = -4 + i$, $z_9 = -3 - 3i$, $z_{10} = \sqrt{2} - i$



если $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то

Арифметические операции над комплексными числами

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

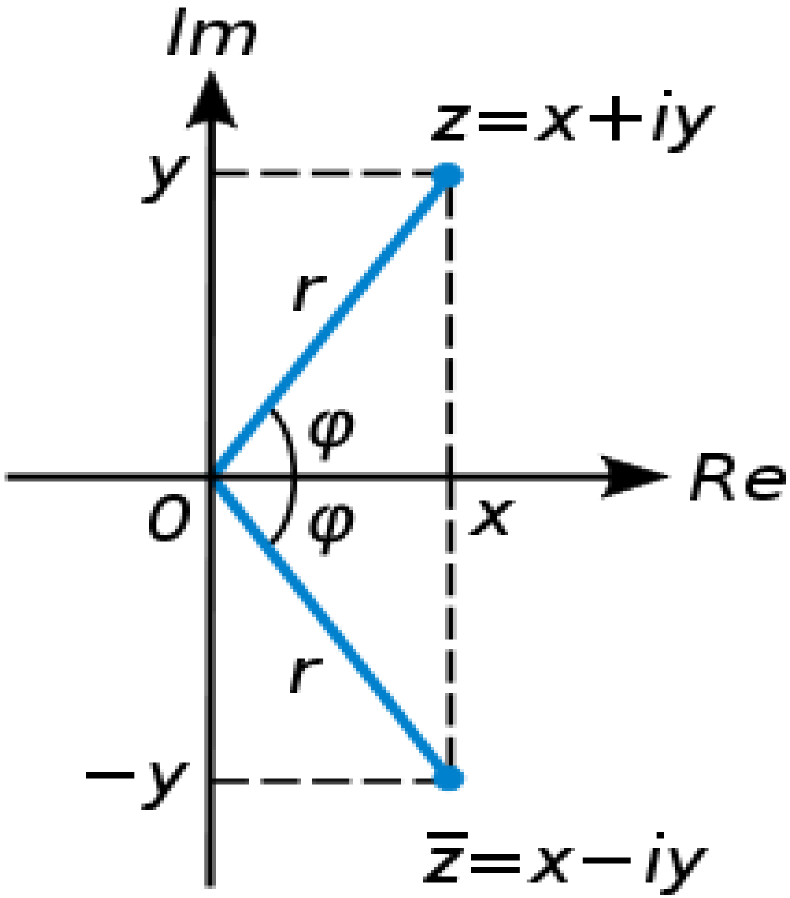
$$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

- **Замечание:**

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**.

Сопряжённые числа



Свойства сопряженных чисел

1. Сумма и произведение двух сопряженных чисел есть число действительное.

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a \qquad z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

2. Число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3. Число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4. Число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Свойства сопряженных чисел

5. **Число, сопряженное *n*-ой степени** комплексного числа z, равно *n*-ой степени числа, сопряженного к числу z, т.е.

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n, \quad n \in N$$

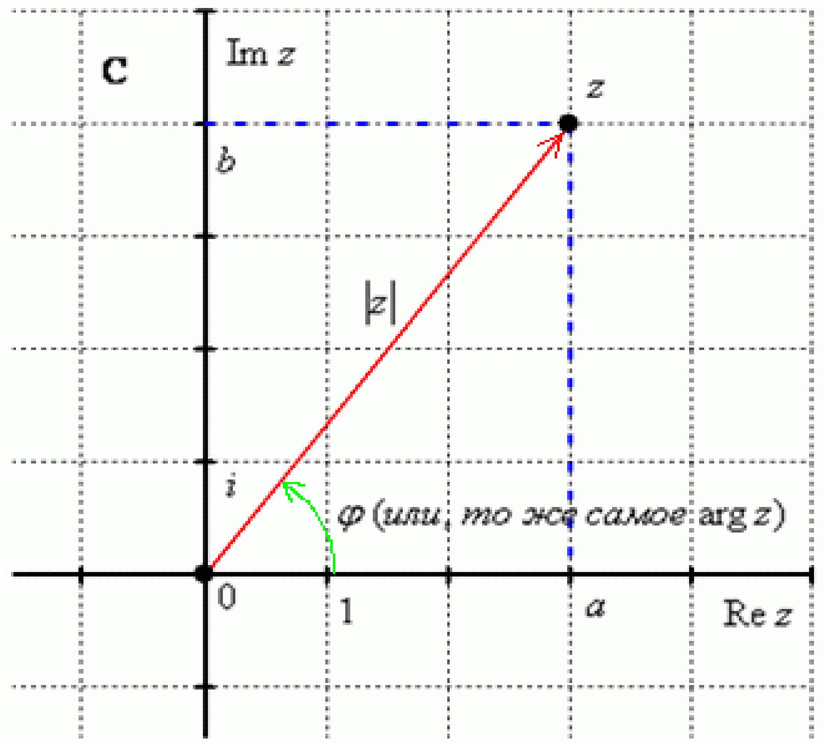
6. Число, сопряженное частному двух комплексных чисел, из которых делитель отличен от нуля, равно частному сопряженных чисел, т.е.

$$\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \frac{\overline{(a+bi)}}{\overline{(c+di)}}$$

2. Тригонометрическая форма

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Геометрическая модель



Формулы главных значений аргумента

$$\arg Z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, M \in I \quad или \quad M \in IY\ четв. \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, \qquad M \in II \quad четв \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, \qquad M \in \mathrm{III} \quad четв \\ \dfrac{\pi}{2}, \qquad если \quad \mathrm{x} = 0, \quad y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, \qquad если \quad x = 0, \quad y < 0 \end{cases}$$

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

При умножении/делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются /делятся, а аргументы складываются (вычитаются).

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

При возведении комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

в натуральную степень ***n***

модуль данного числа возводится в эту степень,

а аргумент умножается на показатель степени:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

формула Муавра

Корень n-й степени из комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

имеет ***n*** *различных значений, которые находятся по формуле :*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right)$$

Здесь к = 0, 1, 2, … *n-1*

Корни из единицы

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

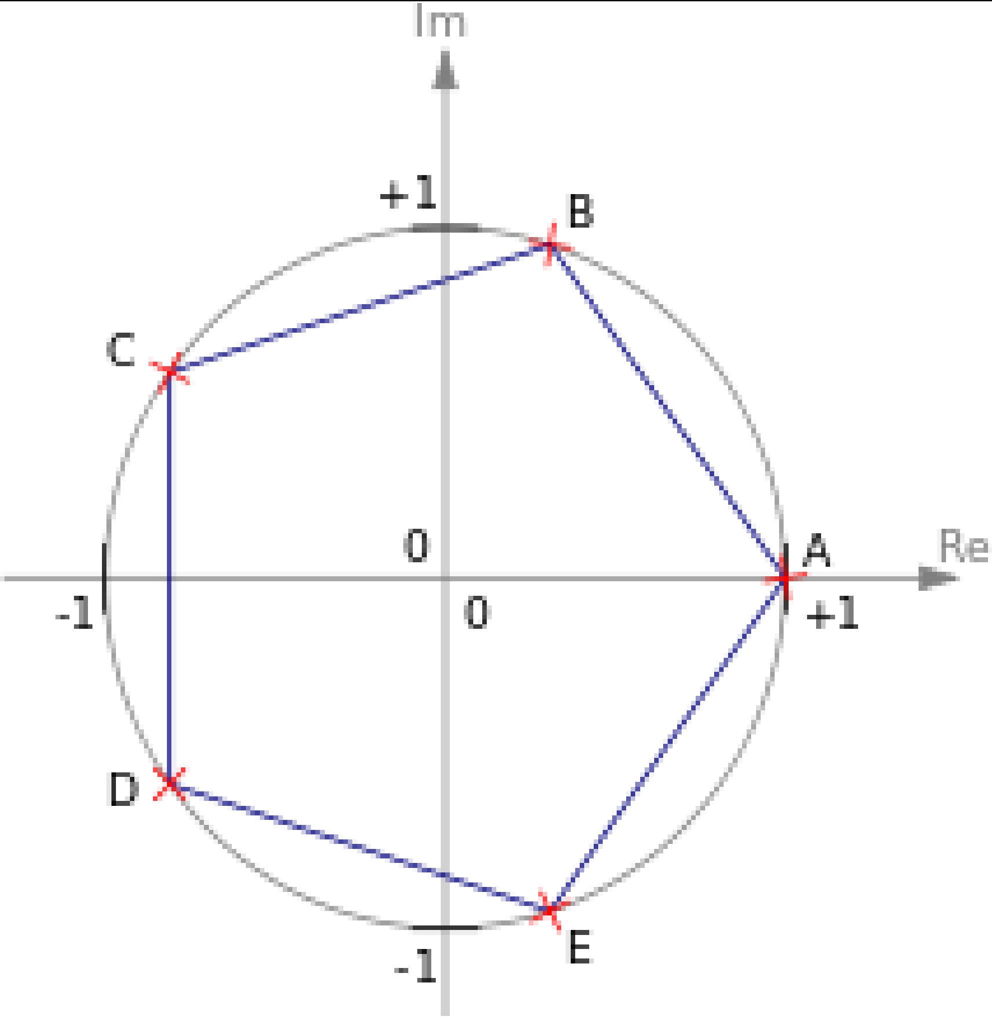
В частности

$$\sqrt{1} = \{1,\ -1\},$$

$$\sqrt[3]{1} = \left\{1,\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},$$

$$\sqrt[4]{1} = \{1,\ -1,\ i,\ -i\}.$$

Корни пятой степени из единицы (вершины пятиугольника)



Степени мнимой единицы

По определению первой степенью числа *i* является само число *i*, а второй степенью – число -1:

$$i^1 = i, \; i^2 = -1$$

Более высокие степени числа *i* находятся следующим образом:

$$i^4 = i^3 \cdot i = -\cdot i^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

Очевидно, что при любом натуральном *n*

$$i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i;$$

$$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i.$$

История

Геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось впервые в работе Весселя (1799).

Первые шаги в этом направлении были сделаны Валлисом (Англия) в 1685 году.

Современное геометрическое представление, иногда называемое «диаграммой Аргана»,
вошло в обиход после опубликования в 1806
м и 1814-м годах работы Ж. Р. Аргана, повторявшей независимо выводы Весселя.

Термины ***«модуль», «аргумент» и «сопряжённое число»*** ввёл Коши.

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

При умножении/делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются /делятся, а аргументы складываются (вычитаются).

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

При возведении комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

в натуральную степень ***n***

модуль данного числа возводится в эту степень,

а аргумент умножается на показатель степени:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

формула Муавра

Корень n-й степени из комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

имеет ***n*** *различных значений, которые находятся по формуле :*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi\kappa}{n}\right)$$

Здесь к = 0, 1, 2, … *n-1*

4. Показательная форма комплексного числа:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

- **Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме**

Если комплексные числа

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \qquad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

записаны в показательной форме, то умножение, деление, возведение в степень производится по правилам действий со степенями.

- Произведение находится по формуле

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Частное находится по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

- Возведение в степень **n** вычисляется по формуле

$$z^n = r^n e^{i\varphi n}$$

- Для вычисления корня

из комплексного числа

$$z = re^{i\varphi}$$

используется формула

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$$

где k принимает n значений: 0,1,2,…,n-1.

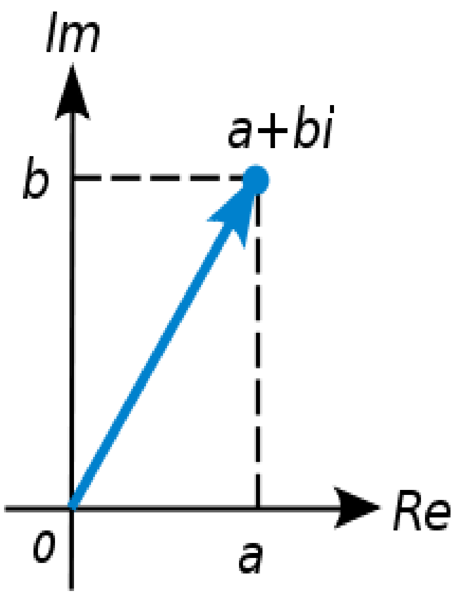
Формы комплексного числа

1. Алгебраическая форма

$$z = a + b \cdot i$$

2. Тригонометрическая (Геометрическая) форма

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$



3. Показательная форма

$$z = r \cdot e^{i \cdot \phi}$$

Полезная (ОЧЕНЬ!) справочка

1) Нахождение степеней числа *I*

Если показатель степени i делится на 4, то значение степени равно 1,

если при делении показателя на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно i,

если при делении показателя на 4 остаток равен 2, то значение степени равно -1,

если в остатке при делении показателя на 4 будет 3, то значение степени равно –i.

2) Формулы сокращённого умножения

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$$

Вычислить: 1) i^{66}, 2) i^{143}, 3) i^{216} ,4)i^{137}

Решение:

1) i^{66}

66:4=16(2). Остаток равен 2, значит $i^{66}=-1$

2)i^{143}

143 :4=35(3).В остатке 3, значит $i^{143}=-I$

3)i^{216}

216:4=54(0).в остатке 0, значит $i^{216}=1$

4)i^{137}

137:4=34(1).В остатке 1, значит $i^{137}=i$

Понятие мнимой единицы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Комплексное число $(0;1)$ наз. МНИМАЯ ЕДИНИЦА и обозначают: i :

$$\boxed{i = (0;1)}$$

Вычислим $i^2 = i \cdot i$ по правилу умножения для комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1;\ y_1) \cdot (x_2;\ y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2; x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1);$$

$$i^2 = i \cdot i = (0;1) \cdot (0;1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1;0) = -1 \ !!!$$

$$\boxed{i^2 = -1} \Rightarrow \sqrt{-1} = i \text{ и } -i,$$

$$\boxed{\sqrt{-1} = \pm i}$$

Степени мнимой единицы

По определению первой степенью числа *i* является само число *i*, а второй степенью – число -1:

$$i^1 = i,\ i^2 = -1$$

Более высокие степени числа *i* находятся следующим образом:

$$i^4 = i^3 \cdot i = --\cdot i^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

Очевидно, что при любом натуральном *n*

$$i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i;$$

$$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i.$$

После изучения темы «Комплексные числа учащиеся должны:

Знать:

- алгебраическую, геометрическую и тригонометрическую формы комплексного числа.

Уметь:

- производить над комплексными числами операции сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в степень, извлечение корня из комплексного числа;
- переводить комплексные числа из алгебраической формы в геометрическую и тригонометрическую;
- пользоваться геометрической интерпретацией комплексных чисел;
- в простейших случаях находить комплексные корни уравнений с действительными коэффициентами.

Числовые системы

Счётные множества

Натуральные числа • Целые • Рациональные • Алгебраические • Периоды • Вычислимые • Арифметические

Вещественные числа и их расширения

Вещественные • **Комплексные** • Кватернионы • Числа Кэли (октавы, октонионы) • Седенионы • Альтернионы • Процедура Кэли — Диксона • Дуальные • Гиперкомплексные • Суперреальные • Гиперреальные • Surreal number (*англ.*)

Другие числовые системы

Кардинальные числа • Порядковые числа (трансфинитные, ординал) • p-адические • Супернатуральные числа

Также Двойные числа • Иррациональные числа • Трансцендентные • Числовой луч • Бикватернион