Лекция 13 - 14.

ТЕМА: «ТФКП: Выражения, уравнения и системы уравнений с комплексными числами»

План.

1. Простейшие действия с комплексными числами
   1.1 Перевод комплексных чисел из одной формы в другую.
   1.2 Сложение и вычитание
   1.3 Умножение и деление
2. Возведение в степень
3. Извлечение корней квадратных из комплексных чисел. Решение квадратных уравнений
4. Извлечение корней из произвольного комплексного числа. Решение уравнений
5. Выражения с комплексными числами
6. Уравнения
   6.1 Квадратные уравнения с комплексными коэффициентами
7. Системы уравнений

2. Возведение в степень.

Используем формулу Муавра: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

<u>ПРИМЕР 1</u>

Дано комплексное число $z = 3 + \sqrt{3}i$ **, найти** z^{20} **.**

Решение

Найдём тригонометрическую форму числа: $\mathrm{z} = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$,

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$$\varphi = \arg Z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, M \in I\ четв. \quad или \quad M \in IY\ четв. \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, \quad M \in II \quad четв \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, \quad M \in \text{III} \quad четв \\ \dfrac{\pi}{2}, \quad если \quad \text{x} = 0, \quad y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, \quad если \quad x = 0, \quad y < 0 \end{cases}$$

Согласно условию: $x = 3, \quad y = \sqrt{3}, \quad \varphi = arctg\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Тогда, по формуле Муавра:

$$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20} \cdot \left(\cos\left(20 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(20 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right) = (2\sqrt{3})^{20} \cdot \left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

ЗАМЕЧАНИЕ: 1) не нужно считать на калькуляторе $(2\sqrt{3})^{20}$

2) угол следует упростить.

Как упростить? Образно говоря, нужно избавиться от лишних оборотов. Один оборот составляет 2π радиан или 360 градусов. Выясним сколько у нас оборотов в аргументе $\dfrac{10\pi}{3}$.

Для удобства делаем дробь правильной: $\dfrac{10\pi}{3} = 3\dfrac{1}{3}\pi$, после чего становится хорошо видно, что можно убавить один оборот: $\dfrac{10\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{4\pi}{3}$.

Понятно, что $\dfrac{10\pi}{3}$ и $\dfrac{4\pi}{3}$ – это один и тот же угол.

Таким образом, окончательный ответ запишется так:

$$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20} \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} \right)$$

3. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Извлечь КОРЕНЬ КВАДРАТНЫЙ $z = \sqrt{-4}$

$z = \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot i^2} = \pm 2i$

То есть: $z_1 = \sqrt{-4} = -2i$; $z_2 = \sqrt{-4} = 2i$

Выполним проверку:

$(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$
$(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$

Верно!

Вспомним, что такие корни также называют *сопряженными комплексными корнями*.

Таким образом:

$\sqrt{-1} = \pm i$, $\sqrt{-9} = \pm 3i$, $\sqrt{-36} = \pm 6i$, $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$, $\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}i$ и т.д.

Во всех случаях получается <u>два</u> сопряженных комплексных корня.

<u>ПРИМЕР 2</u>

РЕШИТЬ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ $z^2 - 6z + 34 = 0$

Вычислим дискриминант:

$D = 36 - 136 = -100$

Дискриминант отрицателен, и в действительных числах уравнение решения не имеет. Но корень можно извлечь в комплексных числах!

$\sqrt{D} = \pm 10i$

По известным формулам получаем два корня:

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$$

$z_{1,2} = 3 \pm 5i$ – сопряженные комплексные корни

Таким образом, уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$ имеет два сопряженных комплексных корня: $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 3 + 5i$

Нетрудно понять, что в *поле* комплексных чисел «школьное» квадратное уравнение всегда при двух корнях!

4. Извлечение корней из произвольного комплексного числа. Решение уравнений

Уравнение вида $z = \sqrt[n]{w}$ имеет ровно n корней $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$, которые можно найти по формуле:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right),$$

где $|w|$ – это модуль комплексного числа w, φ – его аргумент, а параметр k принимает значения: $k = \{0,1,2,.., n-1\}$

ПРИМЕР 3

Найти корни уравнения $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$

Перепишем уравнение в виде $z = \sqrt{1+\sqrt{3}i}$

В данном примере $w = 1+\sqrt{3}i$, $n = 2$, поэтому уравнение будет

иметь два корня: z_0 и z_1.

Общую формулу можно сразу немножко детализировать:

$$z_k = \sqrt{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right)\right),$$

$$k = \{0;1\}$$

Теперь нужно найти модуль и аргумент комплексного числа

$w = 1+\sqrt{3}i$:

$$|w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Число w располагается в первой четверти, поэтому:

$$\varphi = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Напоминаю, что при нахождении тригонометрической формы комплексного числа всегда желательно сделать чертеж.

Еще более детализируем формулу:,

$$z_k = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right)\right)$$

$$k=\{0;1\}$$

Подставляя в формулу значение $k=0$, получаем первый корень:

$$z_0=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{2}\right)\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Подставляя в формулу значение $k=1$, получаем второй корень:

$$z_1=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{2}\right)\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

Ответ: $z_0=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_1=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

ПРИМЕР 4

Найти корни уравнения $z^3+\alpha=0$, где $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Сначала представим уравнение в виде $z=\sqrt[n]{w}$:

$$z^3=-\alpha$$

Если $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, тогда $-\alpha=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Обозначим $-\alpha$ привычной формульной буквой: $w=-\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Таким образом, требуется найти корни уравнения $z=\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

В данном примере $n=3$, а значит, уравнение имеет три корня:

$z_0, \quad z_1, \quad z_2$

Детализирую общую формулу:

$$z_k=\sqrt[3]{|w|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)\right),$$

$k=\{0;1;2\}$

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $w=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$|w|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Число w располагается во второй четверти, поэтому:

$$\varphi=\pi+arctg\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pi+arctg(-1)=\pi-arctg1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

Еще раз детализирую формулу:

$$z_k=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)\right),$$

$k = \{0;1;2\}$

Корень удобно сразу же упростить:

$$z_k = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right) + i \sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right) \right)$$

Подставляем в формулу значение $k = 0$ и получаем первый корень:

$$z_0 = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot 0}{3} \right) + i \sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot 0}{3} \right) \right) = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)$$

Подставляем в формулу значение $k = 1$ и получаем второй корень:

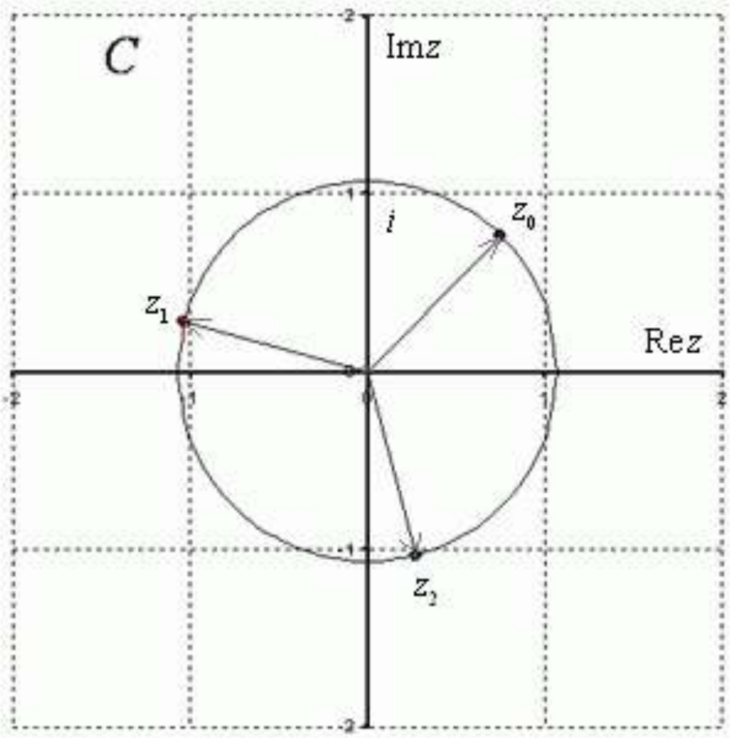
$$z_1 = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot 1}{3} \right) + i \sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot 1}{3} \right) \right) = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\frac{11\pi}{12} + i \sin\frac{11\pi}{12} \right)$$

Подставляем в формулу значение $k = 2$ и получаем третий корень:

$$z_2 = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot 2}{3} \right) + i \sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot 2}{3} \right) \right) = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\frac{19\pi}{12} + i \sin\frac{19\pi}{12} \right)$$

Очень часто полученные корни требуется изобразить геометрически:

Очень часто полученные корни требуется изобразить геометрически:



Как выполнить чертеж?

Сначала на калькуляторе находим, чему равен модуль корней $\sqrt[6]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}07$ и чертим циркулем окружность данного радиуса. Все корни будут располагаться на данной окружности.

Теперь берем аргумент первого корня $\frac{\pi}{4}$ и выясняем, чему равняется угол в градусах: $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45°$. Отмеряем транспортиром $45°$ и ставим на чертеже точку z_0.

Берем аргумент второго корня $\frac{11\pi}{12}$ и переводим его в градусы: $\frac{11\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi} = 165°$. Отмеряем транспортиром $165°$ и ставим на чертеже точку z_1.

По такому же алгоритму строится точка z_2

Легко заметить, что корни расположены геометрически правильно с интервалом $\frac{360}{3} = 120°$ между радиус-векторами.

Чертеж крайне желательно выполнять с помощью транспортира

5. ВЫРАЖЕНИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

ПРИМЕР 5

УПРОСТИТЬ ВЫРАЖЕНИЕ $\dfrac{(-1+3i)z+\sqrt{3}(7-i)}{-2z^2+(-1-7i)}$,

ЕСЛИ $z=-2+i$.

ПРЕДСТАВИТЬ РЕЗУЛЬТАТ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ И ИЗОБРАЗИТЬ ЕГО НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ.

РЕШЕНИЕ

1) Сначала упростим числитель.

Подставим в него значение $z=-2+i$, раскроем скобки и упростим:

$$(-1+3i)(-2+i)+\sqrt{3}(7-i)=2-6i-i-3+7\sqrt{3}-\sqrt{3}i=-1+7\sqrt{3}+(-7-\sqrt{3})i$$

2) Упростим знаменатель.

Если $z=-2+i$, то:

$$-2z^2+(-1-7i)=-2(-2+i)^2-1-7i=-2((-2)^2+2\cdot(-2)\cdot i+i^2)-1-7i=$$
$$=-2(4-4i-1)-1-7i=-6+8i-1-7i=-7+i$$

3) И, наконец, всё выражение. Если $z=-2+i$, то:

$$\frac{(-1+3i)z+\sqrt{3}(7-i)}{-2z^2-1-7i}=\frac{(-1+3i)(-2+i)+\sqrt{3}(7-i)}{-2(-2+i)^2-1-7i}=\frac{-1+7\sqrt{3}+(-7-\sqrt{3})i}{-7+i}=(*)$$

Чтобы избавиться от дроби, умножим числитель и знаменатель на сопряженное знаменателю выражение. При этом в целях применения **формулы разности квадратов** $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ следует предварительно *(и уже обязательно!)* поставить отрицательную действительную часть на 2-е место: $-7+i=i-7$

ВНИМАНИЕ!

НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ НЕ ТОРОПИМСЯ! Лучше перестраховаться и прописать лишний шаг.

В выражениях, уравнениях и системах с комплексными числами самонадеянные устные вычисления **чреваты, как никогда**!

$$(*) = \frac{-1+7\sqrt{3}+(-7-\sqrt{3})i}{i-7} = \frac{(-1+7\sqrt{3}+(-7-\sqrt{3})i)(7+i)}{(i-7)(i+7)} =$$

$$= \frac{7(-1+7\sqrt{3})+7(-7-\sqrt{3})i+(-1+7\sqrt{3})i-(-7-\sqrt{3})}{i^2-49} =$$

$$= \frac{-7+49\sqrt{3}+(-49-7\sqrt{3})i+(-1+7\sqrt{3})i+7+\sqrt{3}}{-1-49} =$$

$$= \frac{-7+49\sqrt{3}+7+\sqrt{3}+(-49-7\sqrt{3}-1+7\sqrt{3})i}{-50} = \frac{50\sqrt{3}-50i}{-50} = -\sqrt{3}+i$$

ПУСТЬ $w = -\sqrt{3}+i$

ПРЕДСТАВИМ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ:

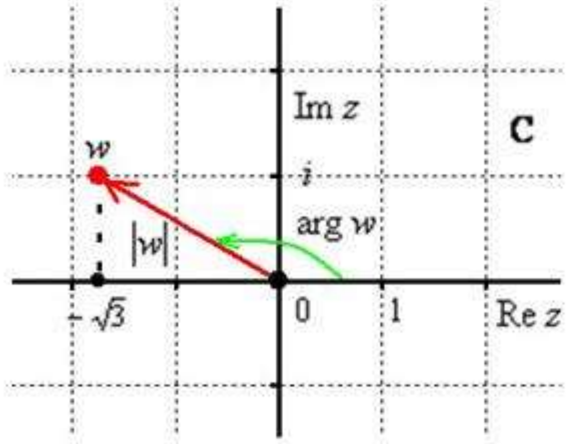
$$z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

Вычислим модуль комплексного числа:

$$|w| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Найдём аргумент. Так как число расположено во 2-й координатной четверти $(a<0, b>0)$, то:

$$\arg w = \pi + arctg\frac{b}{a} = \pi + arctg\frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad (150^\circ)$$



Таким образом, искомое число в тригонометрической форме имеет вид:

$$w = |w| \cdot (\cos(\arg w) + i\sin(\arg w)) = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

Выполним проверку:

$$2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

Верно.

Ответ: $-\sqrt{3} + i = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

ПРИМЕР 6

Вычислить $(z_1 \cdot z_2)^{10}$, если

$z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = \frac{1}{4}(\cos 30° + i\sin 30°)$

РЕШЕНИЕ

ПОРЯДОК ВЫЧИСЛЕНИЙ

СПОСОБ ПЕРВЫЙ

1. Представим оба числа в одной форме. Например, в тригонометрической.
2. Выполним умножение $z_1 \cdot z_2$
3. Возведём в степень по формуле Муавра

СПОСОБ ВТОРОЙ

ВТОРОЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ СОСТОИТ В ТОМ, ЧТОБЫ

1. Перевести 2-е число в алгебраическую форму
2. Выполнить умножение в алгебраической форме
3. Перевести результат $z_1 \cdot z_2$ в тригонометрическую форму
4. Затем возвести в степень

РЕШАЕМ ПЕРВЫМ СПОСОБОМ

ПРЕДСТАВИМ Z_2 В СТАНДАРТНОМ ВИДЕ:

$$z_2 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Найдём модуль и аргумент z_1:

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi_1 = \pi + arctg\frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Используем правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

В нашем случае:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

Далее применяем формулу Муавра

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),$$

$$(z_1 \cdot z_2)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\cos\left(10 \cdot \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(10 \cdot \frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2^{10}} \cdot \left(\cos\frac{25\pi}{3} + i\sin\frac{25\pi}{3}\right)$$

Делая дробь $\frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ правильной, приходим к выводу, что можно уменьшить аргумент на *(8π рад.)*:

$$(z_1 \cdot z_2)^{10} = \frac{1}{2^{10}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

В условии ничего не сказано о форме итогового комплексного числа, поэтому:

Ответ: $(z_1 \cdot z_2)^{10} = \frac{1}{2^{10}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

По требованию результат нетрудно представить и в алгебраической форме:

$$\frac{1}{2^{10}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^{10}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{2^{11}} + \frac{\sqrt{3}}{2^{11}}i$$

5. УРАВНЕНИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

ПРИМЕР 7

Решить уравнение $\dfrac{3+4i}{z}+\dfrac{4-i}{3+2i}=\dfrac{62-50i}{13}$, то есть найти Z.

РЕШЕНИЕ

План решения

1. Выполним деление во втором слагаемом.
2. Займёмся «группировкой» - перенесём второе слагаемое в правую часть
3. Найдём разность
4. Решим полученное уравнение относительно Z

1. Упрощаем среднюю дробь:

$$\frac{3+4i}{z}+\frac{(4-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{62-50i}{13}$$

$$\frac{3+4i}{z}+\frac{12-3i-8i-2}{13}=\frac{62-50i}{13}$$

$$\frac{3+4i}{z}+\frac{10-11i}{13}=\frac{62-50i}{13}$$

2. Результат переносим в правую часть и находим разность:

$$\frac{3+4i}{z}=\frac{62-50i}{13}-\frac{10-11i}{13}$$

$$\frac{3+4i}{z}=\frac{62-50i-10+11i}{13}$$

3. Решаем уравнение

$$\frac{3+4i}{z}=\frac{52-39i}{13}$$

$$\frac{3+4i}{z}=4-3i$$

$$z=\frac{3+4i}{4-3i}=\frac{(3+4i)(4+3i)}{16+9}=\frac{12+16i+9i-12}{25}=i$$

И НАДО СДЕЛАТЬ ПРОВЕРКУ!..

6.1 КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ПРИМЕР 8.

Найти корни квадратного уравнения

$$iz^2+(3-2i)z-6=0$$

ВСПОМНИМ:

корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$

находятся по формуле $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

РЕШЕНИЕ

ЗАМЕЧАНИЕ: на первом месте расположена мнимая единица, и, в принципе, от неё можно избавиться *(умножая обе части на i)*, однако, в этом нет особой надобности.

Для удобства выпишем коэффициенты:

$a=i,\quad b=3-2i,\quad c=-6$

Не теряем «минус» у свободного члена!

НАПИШЕМ уравнение в стандартном виде $az^2+bz+c=0$:

$iz^2+(3-2i)z+(-6)=0$

Вычислим дискриминант:

$D=b^2-4ac=(3-2i)^2-4\cdot i\cdot(-6)=3^2-2\cdot 3\cdot 2i+(2i)^2+24i=9-12i-4+24i=5+12i$

А вот и главное препятствие:

$\sqrt{D} = \sqrt{5+12i}$

Применение общей формулы извлечения корня осложняется серьёзными затруднениями, связанными с аргументом подкоренного комплексного числа *(СМ РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА 3)*

Но существует и другой, БОЛЕЕ ПРОСТОЙ, путь!

Корень будем искать в виде УРАВНЕНИЯ:

$$\sqrt{5+12i} = x + yi$$

Возведём обе части в квадрат:

$$5+12i = (x+yi)^2$$
$$5+12i = x^2 + 2xyi - y^2$$

<u>ДВА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛА РАВНЫ, ЕСЛИ РАВНЫ ИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И ИХ МНИМЫЕ ЧАСТИ.</u>

Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Решаем систему:

$$y = \frac{6}{x}$$
$$x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$$

$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 -$ *биквадратюе уравнение*

по теореме Виета

$x_1^2 = 9$

$x_2^2 = -4$

По условию x и y -действительные числа

Далее находим:

$x_1 = 3 \quad y_1 = 2$

$x_2 = -3 \quad y_2 = -2$

Таким образом:

$\sqrt{D} = \sqrt{5+12i} = 3+2i$
$\sqrt{D} = \sqrt{5+12i} = -3-2i$

Промежуточная проверка (найденного дискриминанта):

$(3+2i)^2 = 9+12i-4 = 5+12i$
$(-3-2i)^2 = (-1)^2 \cdot (3+2i)^2 = 5+12i$

Верно!

Пусть $\sqrt{D} = \sqrt{5+12i} = 3+2i$

Находим корни, не забывая, что $a = i$:

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(3-2i)-(3+2i)}{2i} = \frac{-3+2i-3-2i}{2i} = \frac{-6}{2i} = -\frac{3i}{i \cdot i} = -\frac{3i}{-1} = 3i$$
$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(3-2i)+(3+2i)}{2i} = \frac{-3+2i+3+2i}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

Ответ: $z_1 = 3i, \quad z_2 = 2$

Проверим, удовлетворяют ли найденные корни уравнению $iz^2 + (3-2i)z - 6 = 0$:

1) Подставим $z_1 = 3i$:

$i \cdot (3i)^2 + (3-2i) \cdot 3i - 6 = 0$
$-9i + 9i + 6 - 6 = 0$
$0 = 0$

верное равенство.

2) Подставим $z_2 = 2$:

$i \cdot 2^2 + (3-2i) \cdot 2 - 6 = 0$
$4i + 6 - 4i - 6 = 0$
$0 = 0$

верное равенство.

<u>Замечание:</u> убедитесь, что при $D = -3-2i$ получаем такое же решение

7. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Пример 9

Решить систему уравнений. Ответ представить в алгебраической и показательной формах, изобразить корни на чертеже.

$$\begin{cases} (1+i)z_1+(1-i)z_2=-1+i \\ (1+2i)z_1+(1-2i)z_2=-4+i \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Анализ условие показывает, что система имеет единственное решение, то есть, нам нужно найти два числа z_1, z_2, которые удовлетворяют **каждому** уравнению системы.

РЕШИМ СИСТЕМУ МЕТОДОМ КРАМЕРА

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

Определители находятся по формулам

Главный $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

дополнительные $\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

Вычислим *главный определитель* системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} (1+i) & (1-i) \\ (1+2i) & (1-2i) \end{vmatrix}=(1+i)(1-2i)-(1+2i)(1-i)=1+i-2i+2-(1+2i-i+2)=$$

$$=3-i-(3+i)=3-i-3-i=-2i\neq 0,$$

значит, система имеет единственное решение.

Вычисляем дополнительные определители и находим корни::

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} (-1+i) & (1-i) \\ (-4+i) & (1-2i) \end{vmatrix}=(-1+i)(1-2i)-(-4+i)(1-i)=-1+i+2i+2-(-4+i+4i+1)=$$

$$=1+3i-(-3+5i)=1+3i+3-5i=4-2i$$

Домножаем числитель и знаменатель на мнимую единицу и получаем 1-й корень:

$$z_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{4-2i}{-2i}=\frac{(4-2i)\cdot i}{-2i\cdot i}=\frac{4i+2}{2}=1+2i$$

Аналогично:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}(1+i) & (-1+i)\\ (1+2i) & (-4+i)\end{vmatrix}=(1+i)(-4+i)-(1+2i)(-1+i)=-4-4i+i-1-(-1-2i+i-2)=$$
$$=-5-3i-(-3-i)=-5-3i+3+i=-2-2i$$

$$z_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-2-2i}{-2i}=\frac{(-1-i)\cdot i}{-i\cdot i}=\frac{-i+1}{1}=1-i$$

<u>СДЕЛАЕМ ПРОВЕРКУ</u>

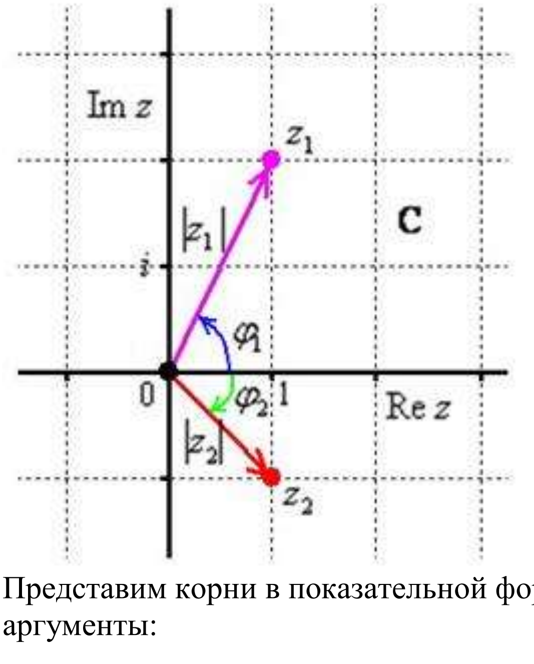
Подставим найденные значения $z_1=1+2i,\quad z_2=1-i$ в левую часть каждого уравнения системы:

1) $(1+i)z_1+(1-i)z_2=(1+i)(1+2i)+(1-i)(1-i)=1+i+2i-2+1-i-i-1=-1+i$

2) $(1+2i)z_1+(1-2i)z_2=(1+2i)(1+2i)+(1-2i)(1-i)=1+2i+2i-4+1-2i-i-2=-4+i$

Получены соответствующие правые части. Верно!

Выполним чертёж:



Представим корни в показательной форме. Для этого нужно найти их модули и аргументы:

1) $|z_1|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\quad \varphi_1=arctg\frac{2}{1}=arctg2$

арктангенс «двойки» вычисляется «плохо», поэтому так и оставляем:

$$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1} = \sqrt{5} \cdot e^{i \cdot arctg2}$$

2) $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi_2 = arctg\frac{-1}{1} = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2} = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Ответ:

$$\begin{cases} z_1 = 1 + 2i = \sqrt{5} \cdot e^{i \cdot arctg2} \\ z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)} \end{cases}$$