Лекция_14.

ТЕМА: «ТФКП: Выражения, уравнения и системы уравнений с комплексными числами»

План.

6. Уравнения
   6.1 Квадратные уравнения с комплексными коэффициентами
7. Системы уравнений

6.1 КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ПРИМЕР 8.

Найти корни квадратного уравнения

$$iz^2 + (3-2i)z - 6 = 0$$

ВСПОМНИМ:

корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

находятся по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

РЕШЕНИЕ

ЗАМЕЧАНИЕ: на первом месте расположена мнимая единица, и, в принципе, от неё можно избавиться *(умножая обе части на* i*)*, однако, в этом нет особой надобности.

Для удобства выпишем коэффициенты:

$a = i, \quad b = 3 - 2i, \quad c = -6$

Не теряем «минус» у свободного члена!

НАПИШЕМ уравнение в стандартном виде $az^2 + bz + c = 0$:

$iz^2 + (3-2i)z + (-6) = 0$

Вычислим дискриминант:

$D = b^2 - 4ac = (3-2i)^2 - 4 \cdot i \cdot (-6) = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2i + (2i)^2 + 24i = 9 - 12i - 4 + 24i = 5 + 12i$

А вот и главное препятствие:

$\sqrt{D} = \sqrt{5+12i}$

Применение общей формулы извлечения корня осложняется серьёзными затруднениями, связанными с аргументом подкоренного комплексного числа *(СМ РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА 3)*

Но существует и другой, БОЛЕЕ ПРОСТОЙ, путь!

Корень будем искать в виде УРАВНЕНИЯ:

$$\sqrt{5+12i} = x + yi$$

Возведём обе части в квадрат:

$$5+12i = (x+yi)^2$$
$$5+12i = x^2 + 2xyi - y^2$$

<u>ДВА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛА РАВНЫ, ЕСЛИ РАВНЫ ИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И ИХ МНИМЫЕ ЧАСТИ.</u>

Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Решаем систему:

$$y = \frac{6}{x}$$
$$x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$$

$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 -$ *биквадратное уравнение*

по теореме Виета

$x_1^2 = 9$

$x_2^2 = -4$

По условию x и y -действительные числа

Далее находим:

$$x_1 = 3 \quad y_1 = 2$$
$$x_2 = -3 \quad y_2 = -2$$

Таким образом:

$$\sqrt{D} = \sqrt{5+12i} = 3+2i$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{5+12i} = -3-2i$$

Промежуточная проверка (найденного дискриминанта):

$$(3+2i)^2 = 9+12i-4 = 5+12i$$
$$(-3-2i)^2 = (-1)^2 \cdot (3+2i)^2 = 5+12i$$

Верно!

Пусть $\sqrt{D} = \sqrt{5+12i} = 3+2i$

Находим корни, не забывая, что $a = i$:

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(3-2i)-(3+2i)}{2i} = \frac{-3+2i-3-2i}{2i} = \frac{-6}{2i} = -\frac{3i}{i \cdot i} = -\frac{3i}{-1} = 3i$$
$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(3-2i)+(3+2i)}{2i} = \frac{-3+2i+3+2i}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

Ответ: $z_1 = 3i, \quad z_2 = 2$

Проверим, удовлетворяют ли найденные корни уравнению $iz^2 + (3-2i)z - 6 = 0$:

1) Подставим $z_1 = 3i$:

$$i \cdot (3i)^2 + (3-2i) \cdot 3i - 6 = 0$$
$$-9i + 9i + 6 - 6 = 0$$
$$0 = 0$$

верное равенство.

2) Подставим $z_2 = 2$:

$$i \cdot 2^2 + (3-2i) \cdot 2 - 6 = 0$$
$$4i + 6 - 4i - 6 = 0$$
$$0 = 0$$

верное равенство.

Замечание: убедитесь, что при $D = -3-2i$ получаем такое же решение

7. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Пример 9

Решить систему уравнений. Ответ представить в алгебраической и показательной формах, изобразить корни на чертеже.

$$\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=-1+i\\(1+2i)z_1+(1-2i)z_2=-4+i\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Анализ условие показывает, что система имеет единственное решение, то есть, нам нужно найти два числа z_1, z_2, которые удовлетворяют **каждому** уравнению системы.

РЕШИМ СИСТЕМУ МЕТОДОМ КРАМЕРА

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

Определители находятся по формулам

Главный $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$

дополнительные $\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}$ $\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}$

Вычислим *главный определитель* системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}(1+i) & (1-i)\\(1+2i) & (1-2i)\end{vmatrix}=(1+i)(1-2i)-(1+2i)(1-i)=1+i-2i+2-(1+2i-i+2)=$$

$$=3-i-(3+i)=3-i-3-i=-2i\neq 0,$$

значит, система имеет единственное решение.

Вычисляем дополнительные определители и находим корни::

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}(-1+i) & (1-i)\\(-4+i) & (1-2i)\end{vmatrix}=(-1+i)(1-2i)-(-4+i)(1-i)=-1+i+2i+2-(-4+i+4i+1)=$$

$$=1+3i-(-3+5i)=1+3i+3-5i=4-2i$$

Домножаем числитель и знаменатель на мнимую единицу и получаем 1-й корень:

$$z_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4-2i}{-2i} = \frac{(4-2i)\cdot i}{-2i\cdot i} = \frac{4i+2}{2} = 1+2i$$

Аналогично:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (1+i) & (-1+i) \\ (1+2i) & (-4+i) \end{vmatrix} = (1+i)(-4+i)-(1+2i)(-1+i) = -4-4i+i-1-(-1-2i+i-2) =$$

$$= -5-3i-(-3-i) = -5-3i+3+i = -2-2i$$

$$z_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2-2i}{-2i} = \frac{(-1-i)\cdot i}{-i\cdot i} = \frac{-i+1}{1} = 1-i$$

<u>СДЕЛАЕМ ПРОВЕРКУ</u>

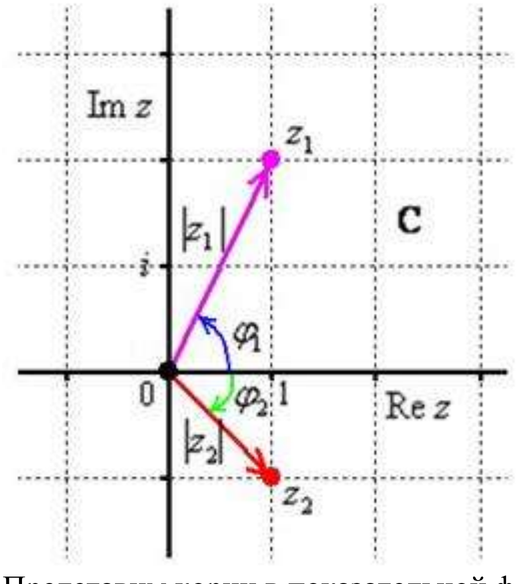
Подставим найденные значения $z_1 = 1+2i, \quad z_2 = 1-i$ в левую часть каждого уравнения системы:

1) $(1+i)z_1 + (1-i)z_2 = (1+i)(1+2i)+(1-i)(1-i) = 1+i+2i-2+1-i-i-1 = -1+i$

2) $(1+2i)z_1 + (1-2i)z_2 = (1+2i)(1+2i)+(1-2i)(1-i) = 1+2i+2i-4+1-2i-i-2 = -4+i$

Получены соответствующие правые части. Верно!

Выполним чертёж:



Представим корни в показательной форме. Для этого нужно найти их модули и аргументы:

1) $|z_1| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}, \quad \varphi_1 = arctg\frac{2}{1} = arctg2$ _

арктангенс «двойки» вычисляется «плохо», поэтому так и оставляем:
$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1} = \sqrt{5} \cdot e^{i \cdot arctg2}$

2) $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi_2 = arctg\dfrac{-1}{1} = arctg(-1) = -\dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2} = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Ответ:

$$\begin{cases} z_1 = 1 + 2i = \sqrt{5} \cdot e^{i \cdot arctg2} \\ z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)} \end{cases}$$