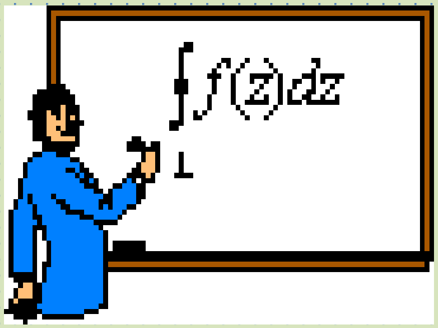
Лекция



Теория функции комплексной переменной - 1

Дух божий нашёл тончайшую отдушину в этом чуде анализа,
уроде из мира идей, двойственной сущности,
находящейся между бытием и небытием,
которую мы называем мнимым корнем из отрицательной единицы

Лейбниц

План

1. **Общие понятия**
2. **Дифференцирование функции комплексной переменной. Условия Коши – Римана**
3. **Нахождение функции комплексной переменной по известной действительной или мнимой части**

Из истории науки

- Первое применение комплексных чисел к решению задач ***математического анализа*** принадлежит **Лейбницу и И. Бернулли.**
- В печатных работах и в научной переписке оба

ученых пришли к интегралам вида

$$\int \frac{dx}{ax+b}$$

где **a** и **b** – комплексные числа, и рассматривали их (интегралы) как «мнимые логарифмы».

- Лейбниц утверждал, что логарифмы отрицательных чисел мнимы, а Бернулли пытался доказать, что они действительны.
- Ни тот, ни другой не подозревал, что ***логарифм многозначен***.
- Теорию, устраняющую все затруднения, дал **Эйлер** в статье **«Спор между Бернулли и Лейбницем о логарифмах отрицательных и мнимых чисел»** (1749).
- **Эйлер** в течение 30-40-х годов XVIII в. разработал ***теорию элементарных функций комплексной переменной*** и к известным разложениям этих функций в степенные ряды добавил еще **аппарат бесконечных произведений**

- **Эйлер**, решая задачу о построении **географических карт**, изучал проблему конформного отображения в общей постановке и использовал для этой цели комплексную переменную.
- В XVIII в. был накоплен обширный материал по основам теории аналитических функций и **выявлена плодотворность изучения функций комплексной переменной.**
- Основную роль в создании теории функции комплексной переменной сыграл петербургский академик Леонард Эйлер

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716)

Весь мир его узнал по созданным трудам,

Был даже край родной с ним вынужден считаться,

Уроки мудрости давал он мудрецам,

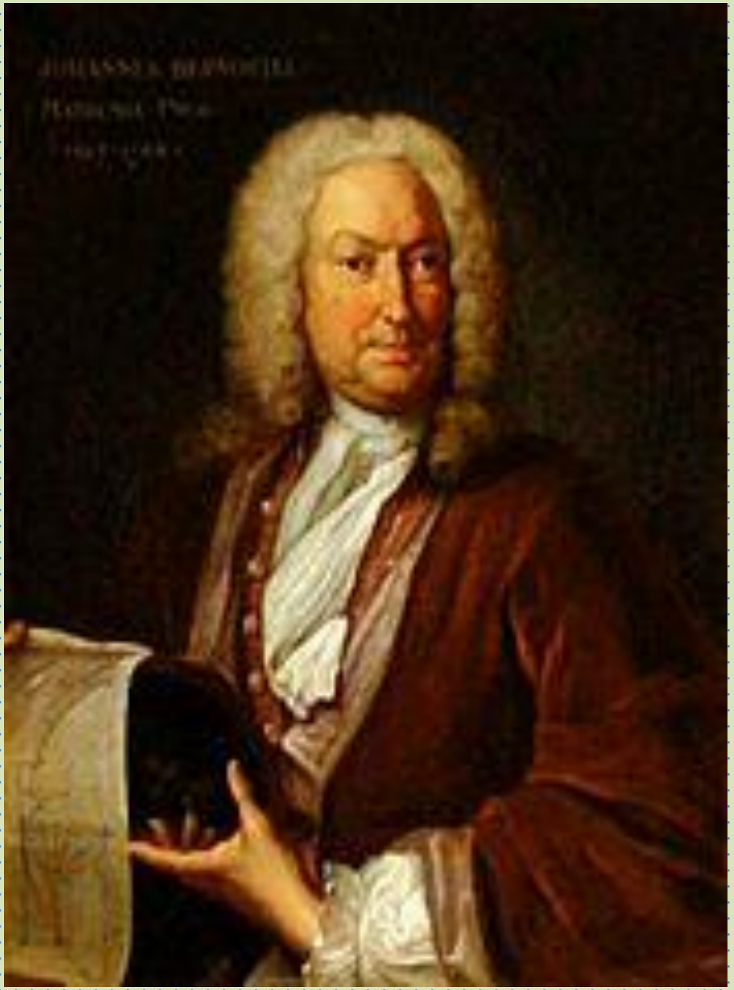
Он был мудрее их: ***умел он сомневаться.***

Вольтер

Немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат изобретатель языковед.

Основатель и первый президент Берлинской Академии наук, иностранный член Французской Академии наук

Иоганн Бернулли (1667—1748)



Его ум видел истину,

Его сердце познало справедливость.

Он — гордость Швейцарии

И всего человечества.

Вольтер

- **Иоганн Бернулли -** швейцарский математики и механик, самый знаменитый представитель семейства Бернулли, младший брат Якоба Бернулли, отец Даниила Бернулли.
- Один из первых разработчиков математического анализа, после смерти И. Ньютона - лидер европейских математиков.
- Иностранный член Парижской (1699), Берлинской (1701), Петербургской (1725) академий наук и Лондонского Королевского общества (1712).

Леонард Эйлер (1707 – 1783)

- **Леонард Эйлер -** швейцарский, немецкий и российский **математик и механик**, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук).

Эйлер — автор более чем 850 работ по

- **математическому анализу,**
- **дифференциальной геометрии,**
- **теории чисел,**
- **приближённым вычислениям,**
- **небесной механики,**
- **математической физике,**
- **оптике,**
- **баллистике,**
- **кораблестроению,**
- **теории музыки и другим областям.**

- Эйлер почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки. Хорошо знал русский язык и часть своих сочинений (особенно учебники) публиковал на русском. Первые русские академики-математики (С.К. Котельников) и астрономы (С.Я. Румовский) были учениками Эйлера.
- Некоторые из его потомков до сих пор живут в России.

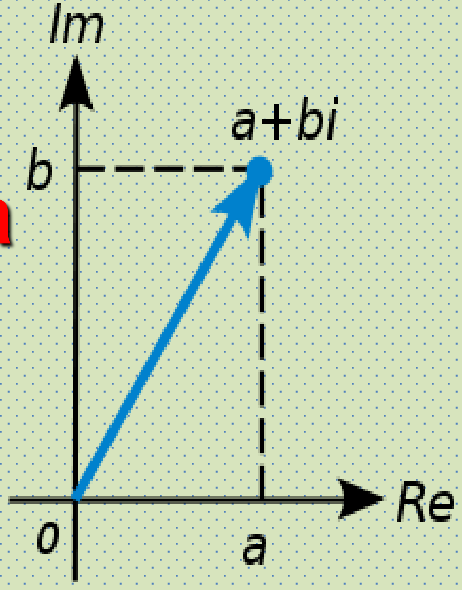
Формы комплексного числа

1. Алгебраическая форма

$$z = a + b \cdot i$$

2. Геометрическая форма

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$



3. Показательная форма

$$z = r \cdot e^{i \cdot \phi}$$

1. Общие понятия

- Каждая комплексная функция $w = f(z) = f(x+iy)$ может рассматриваться как пара вещественных функций от двух переменных:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad ,$$

определяющих её вещественную и мнимую часть соответственно.

- Функции $u(x, y), v(x, y)$ называются *компонентами* комплексной функции
- *Ограниченность* комплексной функции $f(z)$ предполагает ограниченность её модуля (из чего следует ограниченность в обычном смысле обеих компонент).

Вывод: **любую функцию комплексного аргумента можно представить в виде**

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ - действительные функции двух действительных переменных. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ называются компонентами функции ***f(z):***

$u(x, y)$ - действительная компонента,

$v(x, y)$ - мнимая компонента.

Пишут :

$$u = \mathrm{Re}\, f(z) \qquad v = \mathrm{Im}\, f(z)$$

Пример: Для функции $f(z) = z^2 + 4i$,

где независимая комплексная переменная $z = x + iy$,
найти ее действительную и мнимую часть.

Решение:

Подставим в функцию $z = x + iy$

$$f(z) = (x+iy)^2 + 4i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2 + 4i$$

$$f(z) = (x+iy)^2 + 4i = x^2 - y^2 + 2xyi + 4i$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2(xy+2)i$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2(xy+2)i \Leftrightarrow f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$$

Следовательно,

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2(xy + 2)i \Leftrightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy + 4 \end{cases}$$

- Ответ: $\operatorname{Re}(f(z)) = x^2 - y^2$

$$\operatorname{Im}(f(z)) = 2xy + 4$$

В отличие от действительного анализа, в комплексном анализе допускаются многозначные функции.

$f(z) = z^2$ - однозначная функция

$f(z) = \sqrt[n]{z}$ - ***n*** - значная функция;

$f(z) = Argz$ - бесконечнозначная функция.

Если функция однозначна, то она может быть задана в виде отображения $f : D \to C$

В таком случае функция называется однолистной .

В дальнейшем будут рассматриваться в основном однолистные функции.

Предел функции

- Понятие предела для функции вводится так же, как и в вещественном случае, с заменой абсолютной величины на комплексный модуль.
- Если $\lim\limits_{z \to a+bi} f(z) = A + Bi$, то

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} u(x, y) = A \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} v(x, y) = B$$

- Верно и обратное: из существования пределов компонент вытекает существование предела самой функции, и компонентами предела будут пределы компонентов.
- Непрерывность комплексной функции определяется так же, как и в вещественном случае, и она равносильна непрерывности обеих её компонент.

- Все основные теоремы о пределе и непрерывности вещественных функций имеют место и в комплексном случае, если это расширение не связано со сравнением комплексных величин на *больше - меньше*.

Понятие непрерывности определяется аналогично действительному случаю.

F(z)-непрерывна в точке z_0 , если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon)$$

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Это определение

формально совпадает с понятием непрерывной функции действительной переменной, поэтому все свойства непрерывной функции комплексного аргумента совпадают дословно со свойствами действительных функций.

Бесконечно удалённая точка

- В комплексном анализе часто рассматривают *полную комплексную плоскость*, дополненную по сравнению с обычной *бесконечно удалённой точкой*: $z = \infty$.
- При таком подходе неограниченно возрастающая (по модулю) последовательность считается сходящейся к бесконечно удалённой точке.
- Алгебраические операции с бесконечностью **не производятся,** хотя несколько алгебраических соотношений имеют место:

$$\frac{z}{0} = \infty (z \neq 0); \quad \frac{z}{\infty} = 0; \quad z + \infty = \infty (z \neq \infty); \quad z \cdot \infty = \infty$$

Дифференцирование

- **Определение**

Производная для комплексной функции одного аргумента $w = f(z)$ определяется так же, как и для вещественной:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{z_o \to 0} \frac{f(z+z_0) - f(z)}{z}$$

(здесь Z_0 — комплексное число).

Если этот предел существует, функция называется *дифференцируемой* или ***голоморфной***.

- При этом важно понимать:

поскольку комплексная функция задана на плоскости, существование приведённого предела означает, что он одинаков при стремлении к z_0 ***с любого направления***.

- Этот факт накладывает существенные ограничения на вид функций-компонент

$$u(x,y) \quad \text{и} \quad v(x,y)$$

- и определяет их жёсткую взаимосвязь (условия Коши — Римана):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- Отсюда следует, что дифференцируемость компонент $u(x,y)$ и $v(x,y)$ недостаточна для дифференцируемости самой функции.

Свойства функций, отличающие комплексный анализ от вещественного:

- Всякая дифференцируемая в некоторой окрестности точки комплексная функция дифференцируема неограниченное число раз и аналитична, то есть её ряд Тейлора сходится к данной функции во всех точках этой окрестности (в литературе наряду с термином *аналитическая функция* используется также его синоним «голоморфная функция»)

- (Теорема Лиувилля): Если функция дифференцируема на всей комплексной плоскости и не является константой, то её модуль не может быть ограничен.

- Обе компоненты дифференцируемой комплексной функции являются гармоническими функциями, то есть удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

- Любая гармоническая функция может быть как вещественной, так и мнимой компонентой дифференцируемой функции. При этом другая компонента определяется однозначно (из условий Коши — Римана), с точностью до константы-слагаемого.

Вывод:

- Таким образом, любая дифференцируемая комплексная функция — это функция вида

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

- где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — взаимосвязанные гармонические функции двух аргументов.

Подведём итоги

- Для функции комплексной переменной $f(z)$ ***справедливы и правила дифференцирования, и таблица производных элементарных функций***
- Для многих функций комплексной переменной ***производной не существует вообще***, и приходится выяснять, *дифференцируема ли* та или иная функция, прежде чем приступать к её дифференцированию

- Для того, чтобы функция комплексной переменной

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

  была дифференцируема необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) существуют частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

2) выполняются **условия Коши-Римана**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Пример. Для функции $w = f(z) = 3z - i \cdot z^2$

1) Определить действительную и мнимую части функции
2) Проверить выполнение условий Коши-Римана.
3) В случае выполнения условий Коши-Римана, найти производную функции.

<u>Решение</u>

1) Найдём действительную и мнимую часть функции

Так как $z = x + iy$, то находим:

$$w = f(z) = 3(x+iy) - i\cdot(x+iy)^2$$

$$w = f(z) = 3x + 3iy - i(x^2 - y^2 + 2xyi)$$

$$w = f(z) = 3x + 2xy + i(3y + y^2 - x^2)$$

Следовательно, $u(x,y) = 3x + 2xy -$ *действительная часть*

$$v(x,y) = 3y + y^2 - x^2 - \quad \textit{мнимая часть}$$

2) Проверим выполнение условий Коши - Римана. Их два

(1) Убедимся, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(3x + 2xy\right)_x' = 3 + 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(3y + y^2 - x^2\right)_y' = 3 + 2y$$

Условие $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ выполнено

(2) Убедимся, что $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(3x + 2xy\right)_y' = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(3y + y^2 - x^2\right)_x' = -2x$$

Условие $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ выполнено

Вывод: условия Коши-Римана выполнены, следовательно, функция дифференцируема.

3) Найдём производную функции.

Производная находится по обычным правилам:

$$\mathrm{f}'(\mathrm{z}) = \left(3z - i \cdot z^{2}\right)' = 3 - 2iz$$

Мнимая единица при дифференцировании считается константой.

Ответ: **1)**

$$u(x, y) = 3x + 2xy$$

$$v(x, y) = 3y + y^{2} - x^{2}$$

$$f(z) = (3x + 2xy) + i\left(3y + y^{2} - x^{2}\right)$$

2) Условия Коши – Римана выполнены

3) $\mathrm{f}'(\mathrm{z}) = 3 - 2iz$

или $\mathrm{f}'(\mathrm{z}) = 3 - 2i(x + iy) = 3 + 2y - 2xi$

Замечание

- Существуют еще два способа нахождения производной, но они применяются реже:

1) $$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Зеркальные формулы для нахождения производной:

2) $$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Убедимся в справедливости этих формул:

- Найденные частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 + 2y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3 + 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -2x$$

$$u(x, y) = 3x + 2xy$$

$$v(x, y) = 3y + y^2 - x^2$$

- подставим в формулы:

1) $$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3 + 2y - 2xi$$

2) $$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 3 + 2y - 2xi$$

Верно!

В теории комплексного анализа определены и другие функции комплексного аргумента: экспонента, синус, косинус и т.д. Данные функции обладают необычными и даже причудливыми свойствами

Формулы Эйлера

- Для любого *действительного* числа α справедливы следующие формулы:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

Пример

1) Определить действительную и мнимую части функции $f(z)=e^{3z+i}$.
2) Проверить выполнение условий Коши-Римана.
3) Найти производную.

Решение

1) Так как $z = x + iy$, то показатель степени экспоненты равен:

$$3z+i=3(x+iy)+i=3x+3iy+3i=3x+i(3y+1)$$

и $f(z)=e^{3x+i(3y+1)}$

Используем свойства степени и формулу Эйлера:

$$f(z)=e^{3x}\cdot e^{i(3y+1)}=e^{3x}(\cos(3y+1)+i\sin(3y+1))$$

- Действительная часть имеет вид:

$$u(x,y) = e^{3x}\cos(3y+1)$$

- Мнимая часть имеет вид:

$$v(x,y) = e^{3x}\sin(3y+1)$$

2) Проверим выполнение условий Коши-Римана:

а) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{3x}\cos(3y+1)\right)_x' = 3\cdot e^{3x}\cos(3y+1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(e^{3x}\sin(3y+1)\right)_y' = 3\cdot e^{3x}\cos(3y+1)$$

Условие выполнено

б) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{3x}\cos(3y+1)\right)_y' = -3\cdot e^{3x}\sin(3y+1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(e^{3x}\sin(3y+1)\right)_x' = 3\cdot e^{3x}\sin(3y+1)$$

Условие выполнено

Условия Коши – Римана выполнены. Следовательно заданная функция дифференцируема.

3) Найдём производную

$$f'(z) = \left(e^{3z+i}\right)_z' = (3z+i)'\cdot e^{3z+i} = 3\cdot e^{3z+i}$$

Ответ: (записать!)

3. **Нахождение функции комплексной переменной по известной действительной или мнимой части**

- 3.1 Дана действительная часть $u(x, y)$

Функции комплексной переменной $w = f(z)$,

где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

То есть необходимо найти мнимую часть функции $v(x, y)$ и составить функцию $f(z)$

Рассмотрим решение этой задачи на примере

ПРИМЕР . По известной действительной части функции комплексной переменной $u(x, y) = -x^2 + y^2 - 5y$

восстановить функцию $w = f(z)$ комплексной переменной, удовлетворяющую начальному условию $f(0) = 0$

- Решение

- Функция $v(x, y)$ неявно содержится в условиях Римана - Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

1) Найдём частные производные функции

$$u(x, y) = -x^2 + y^2 - 5y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(-x^2 + y^2 - 5y\right)_x' = -2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(-x^2 + y^2 - 5y\right)_y' = 2y - 5$$

Согласно условиям Римана – Коши имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(2y - 5) = -2y + 5$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -2x$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2y + 5$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2x$$

- По известным двум частным производным надо восстановить общий интеграл (мнимую часть искомой функции $v(x,y)$ комплексной переменной)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2x \Rightarrow v(x,y) = -2x\int dy = -2xy + \varphi(x)$$

$$v(x,y) = -2xy + \varphi(x)$$

- Найдём функцию $\varphi(x)$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(-2xy + \varphi(x)\right)'_x = -2y + \varphi'(x)$$

- И эта производная равна из условий Р-К равна $\frac{\partial v}{\partial x} = -2y + 5$

- Приравниваем $-2y+\varphi'(x)=-2y+5$
- Получаем $\varphi'(x)=5$
- Восстанавливаем функцию $\varphi(x)$ интегрированием:

$$\varphi(x)=5\int dx=5x+C$$

Таким образом, функция $v(x,y)=-2xy+\varphi(x)$

Мнимая часть функции $f(z)$ равна

$$v(x,y)=-2xy+5x+C$$

- 2) Найдём функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
- Подставим

$$u(x, y) = -x^2 + y^2 - 5y$$

$$v(x, y) = -2xy + 5x + C \qquad f(0) = 0$$

- Получили:

$$f(z) = -x^2 + y^2 - 5y + \left(-2xy + 5x + C\right)i$$

- Группируем

$$f(z) = -x^2 + y^2 - 2xyi + 5yi^2 + 5xi + Ci$$

$$f(z) = \left(-x^2 + y^2 - 2xyi\right) + 5i\left(yi + x\right) + Ci$$

$$f(z) = -z^2 + 5iz + Ci$$

- Из начального условия $f(0)=0$

  найдём C

$$f(0)=-0^2+5i\cdot 0+Ci\Rightarrow C=0$$

Ответ: 1) $v(x,y)=-2xy+5x$

2) $f(z)=-z^2+5iz$

Валерий Брюсов

К ПОРТРЕТУ ЛЕЙБНИЦА

Когда вникаю я, как робкий ученик,
В твои спокойные, обдуманные строки,
Я знаю — ты со мной! Я вижу строгий лик,
Я чутко слушаю великие уроки.

О Лейбниц, о мудрец, создатель вещих книг!
Ты — выше мира был, как древние пророки.
Твой век, дивясь тебе, пророчеств не постиг
И с лестью смешивал безумные упреки.

Но ты не проклинал и, тайны от людей
Скрывая в символах, учил их, как детей.
Ты был их детских снов заботливый хранитель.

А после — буйный век глумился над тобой,
И долго ждал ты час, назначенный судьбой...
И вот теперь встаешь, как Властный, как Учитель!

Вольтер (1694 – 1778)

Один из крупнейших французских философов – просветителей XYIII века:

поэт, прозаик, сатирик, историк, публицист, правозащитник