3.2 **Нахождение функции комплексной переменной по известной мнимой части**

Дана мнимая часть $v(x, y)$

функции комплексной переменной $w = f(z)$,

где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

То есть необходимо найти действительную часть часть функции $u(x, y)$ и составить функцию $f(z)$, удовлетворяющую некоторому начальному условию

Рассмотрим решение этой задачи на примере

ПРИМЕР . По известной мнимой части функции комплексной переменной

$$v(x, y) = 3x^2 - 3y^2 - 2x^3 + 6xy^2 - 3$$

восстановить функцию $w = f(z)$ комплексной переменной, удовлетворяющую начальному условию $f(0) = -3i$

- Решение

- Функция $u(x, y)$ неявно содержится в условиях Римана - Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

1) Найдём частные производные функции

$$v(x,y)=3x^2-3y^2-2x^3+6xy^2-3$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left(3x^2-3y^2-2x^3+6xy^2-3\right)_x'=6x-6x^2+6y^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\left(3x^2-3y^2-2x^3+6xy^2-3\right)_y'=-6y+12xy$$

Согласно условиям Римана – Коши имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-(6x-6x^2+6y^2)=-6x+6x^2-6y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-6x+12xy$$

- По известным двум частным производным надо восстановить общий интеграл (действительную часть искомой функции комплексной переменной $u(x, y)$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6y + 12xy \Rightarrow$$

$$u(x, y) = -6y\int dx + 12y\int xdx = -6xy + 6x^2 y + \varphi(y)$$

$$u(x, y) = -6xy + 6x^2 y + \varphi(y)$$

- Найдём производную функции $u(x, y)$

  по переменной y:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \left(-6xy + 6x^2 y + \varphi(y)\right)_y' = -6x + 6x^2 + \varphi_y'(y)$$

- И эта производная равна из условий К-Р равна $\frac{\partial u}{\partial y} = -6x + 6x^2 - 6y^2$

- Приравниваем правые части и находим:

$$-6x + 6x^2 + \varphi_y'(y) = -6x + 6x^2 - 6y^2$$

$$\varphi_y'(y) = -6y^2$$

- Восстанавливаем функцию $\varphi(y)$ интегрированием:

$$\varphi'_y(y) = -6y^2$$

$$\varphi(y) = -6\int y^2 dy = -2y^3 + C$$

Запишем действительную часть функции:

$$u(x, y) = -6xy + 6x^2 y + \varphi(y)$$

$$u(x, y) = -6xy + 6x^2 y - 2y^3 + C$$

- 2) Найдём функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
- Подставим

$$u(x, y) = -6xy + 6x^2 y - 2y^3 + C$$

$$v(x, y) = 3x^2 - 3y^2 - 2x^3 + 6xy^2 - 3$$

- Получили:

$$f(z) = -6xy + 6x^2 y - 2y^3 + C + \left(3x^2 - 3y^2 - 2x^3 + 6xy^2 - 3\right)i$$

- Вспомним формулы сокращенного умножения и перегруппируем слагаемые:

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2 yi - 3xy^2 - y^3 i$$

$$f(z)=u(x,y)+v(x,y)\cdot i \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=}-6xy+6x^2y-2y^3+C+(3x^2-3y^2-2x^3+6xy^2-3)i \overset{(2)}{=}$$

$$=-6xy+6x^2y-2y^3+C+3x^2i-3y^2i-2x^3i+6xy^2i-3i \overset{(3)}{=}$$

$$=(-2x^3i+6x^2y+6xy^2i-2y^3)+(3x^2i-6xy-3y^2i)+C-3i \overset{(4)}{=}$$

$$=-2i(x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i)+3i(x^2+2xyi-y^2)+C-3i \overset{(5)}{=}$$

$$=-2i(x+yi)^3+3i(x+yi)^2+C-3i=$$

$$=-2iz^3+3iz^2+C-3i$$

$$f(z)=-2iz^3+3iz^2+C-3i$$

- Из условия $f(0) = -3i$ найдём константу и запишем ответ:

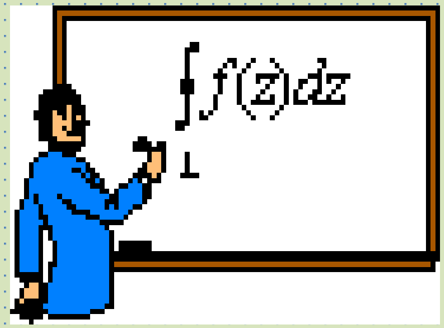
$$f(0) = -2i0^3 + 3i0^2 + C - 3i = -3i$$

$$C = 0$$

- Ответ: 1) $u(x, y) = -6xy + 6x^2y - 2y^3$

  2) $f(z) = -2iz^3 + 3iz^2 - 3i$

Лекция 16



Функции комплексной переменной

План

1. **Элементарные функции комплексной переменной** e^z, $\cos z$, $\sin z$
2. **Логарифмическая функция**
3. **Обобщённые степенная и показательная функции**

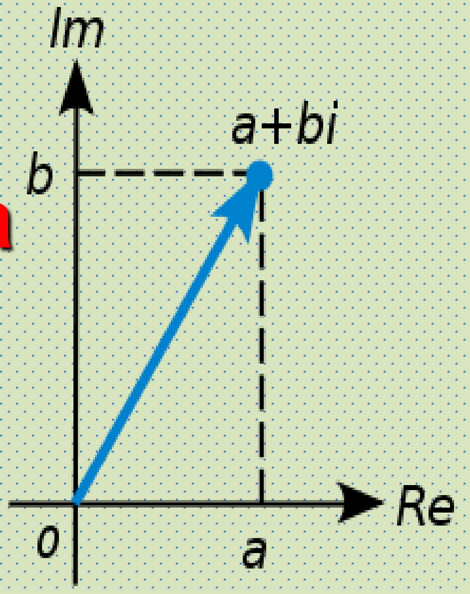
Формы комплексного числа

1. Алгебраическая форма

$$z = a + b \cdot i$$

2. Геометрическая форма

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$



3. Показательная форма

$$z = r \cdot e^{i \cdot \phi}$$

1. Элементарные функции комплексной переменной

$$e^z, \quad \cos z, \quad \sin z$$

Функции $e^z, \quad \cos z, \quad \sin z$ для любого действительного ***z*** представимы в виде рядов

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

Пользуясь признаком Даламбера, можно показать, что эти ряды сходятся для любого КОМПЛЕКСНОГО числа z.

Замечание: функции *sinz* и *cosz* нельзя определять как в тригонометрии, т.к. УГОЛ Z НЕ МОЖЕТ БЫТЬ КОМПЛЕКСНЫМ.

Поэтому функции $e^z, \quad \cos z, \quad \sin z$ определяют с помощью рядов.

Очевидно, что функция sinz – нечётная, а функция cosz - чётная

Связь между функциями

- 1) Запишем функцию e^{iz}

$$e^{iz} = 1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \dots$$

- Перегруппируем слагаемые:

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)$$

- сумма первого ряда есть cosz, сумма второго ряда равна sinz

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

2) Заменим z на -z

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z)$$

Или

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z$$

3) Складывая и вычитая формулы

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z$$, получим:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$ и $$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Свойства функций
$e^z, \quad \cos z, \quad \sin z$

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
2) Функция e^z имеет период $T = 2\pi i$
3) Период функций *sinz, cosz* равен $T = 2\pi$
4) Для функций *sinz, cosz* справедливы все основные тригонометрические тождества: $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

$$\sin 2z = 2\sin z \cdot \cos z$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Пример 1. Вычислить $e^{3+\pi i}$

- Решение

$$e^{3+\pi i} = e^{3} \cdot e^{\pi i} = e^{3}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -e^{3}$$

Пример 2. Вычислить $\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right)$

- Решение

- Используем формулу:

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos i\ln 2 - \sin\frac{\pi}{2}\sin i\ln 2$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right) = -\sin i\ln 2$$

- Используем формулу: $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$-\sin i\ln 2 = -\frac{e^{i^2\ln 2} - e^{-i^2\ln 2}}{2i} = -\frac{e^{-\ln 2} - e^{\ln 2}}{2i} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{2} - 2}{2i} = +\frac{3}{4i} = -\frac{3}{4}i$$

- Ответ: $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + i\ln 2\right) = -\dfrac{3}{4}i$

2. Логарифмическая функция

- Логарифмическая функция вводится как обратная к показательной:

$$w = Lnz, \quad если \quad z = e^{w}$$

$$Пусть \qquad w = u + iv, \quad то \quad z = e^{u+iv} = e^{u} e^{iv}$$

$$Тогда \qquad z = e^{u} (\cos v + i \sin v)$$

- Получили тригонометрическую форму числа z, где e^{u} - модуль числа, v – его аргумент

- Таким образом,

$$e^{u} = |z|, или \quad u = \ln|z|;$$

$$v = Argz + 2\pi k$$

- Поэтому для вычисления

$$Lnz = u + iv$$

- получаем формулу:

$$Lnz = \ln|z| + i(Argz + 2\pi k), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm \ldots$$

- Значение этой функции при k=0 называют главным значением логарифма и обозначают *lnz*
- *Замечание: на функцию Lnz распространяется ряд свойств логарифма действительного переменного:*

$$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$$

$$Ln\frac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2$$

$$Ln(z_1)^{z_2} = z_2 Lnz_1$$

$$e^{Lnz} = z$$

Пример 3. Вычислить $\ln(-1-i\sqrt{3})$

- РЕШЕНИЕ

1.Найдём модуль и аргумент комплексного числа $z=-1-i\sqrt{3}$

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$$

Для третьей четверти

$$Argz=arctg\frac{y}{x}-\pi=$$

$$=arctg\sqrt{3}-\pi=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2}{3}\pi$$

- По формуле

$$Lnz = \ln|z| + i\left(Argz + 2\pi k\right), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm \ldots$$

Главное значение логарифма

$$\ln z = \ln 2 + i\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$$

3. Обобщённые степенная и показательная функции

- Степенная функция $w = z^a$ с произвольным комплексным показателем $a = \alpha + i\beta$

 определяется равенством

$$w = z^a = e^{LnZ^a} = e^{aLnz}$$

- Показательная функция $w = a^Z$ с произвольным комплексным основанием
- $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством

$$w = a^Z = e^{Lna^Z} = e^{Z \cdot Lna}$$

Пример 4. Найти $w = i^i$

- Решение

- Используем формулу

$$w = z^a = e^{LnZ^a} = e^{aLnz}$$

$$w = i^i = e^{iLni} = e^{i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$$

Валерий Брюсов

К ПОРТРЕТУ ЛЕЙБНИЦА

Когда вникаю я, как робкий ученик,
В твои спокойные, обдуманные строки,
Я знаю — ты со мной! Я вижу строгий лик,
Я чутко слушаю великие уроки.

О Лейбниц, о мудрец, создатель вещих книг!
Ты — выше мира был, как древние пророки.
Твой век, дивясь тебе, пророчеств не постиг
И с лестью смешивал безумные упреки.

Но ты не проклинал и, тайны от людей
Скрывая в символах, учил их, как детей.
Ты был их детских снов заботливый хранитель.

А после — буйный век глумился над тобой,
И долго ждал ты час, назначенный судьбой...
И вот теперь встаешь, как Властный, как Учитель!