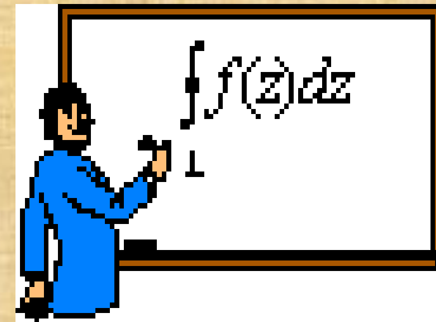
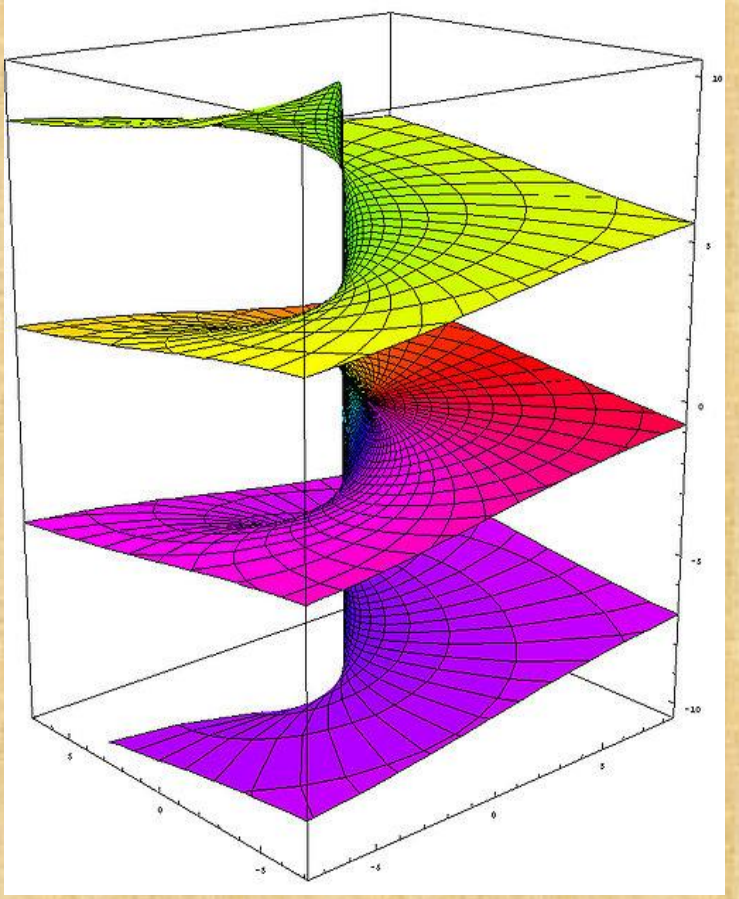
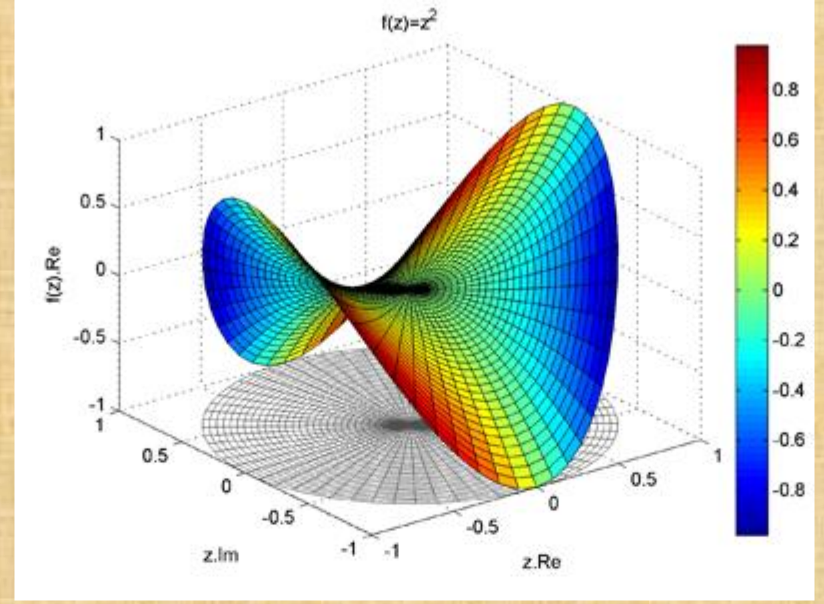
Лекция 17

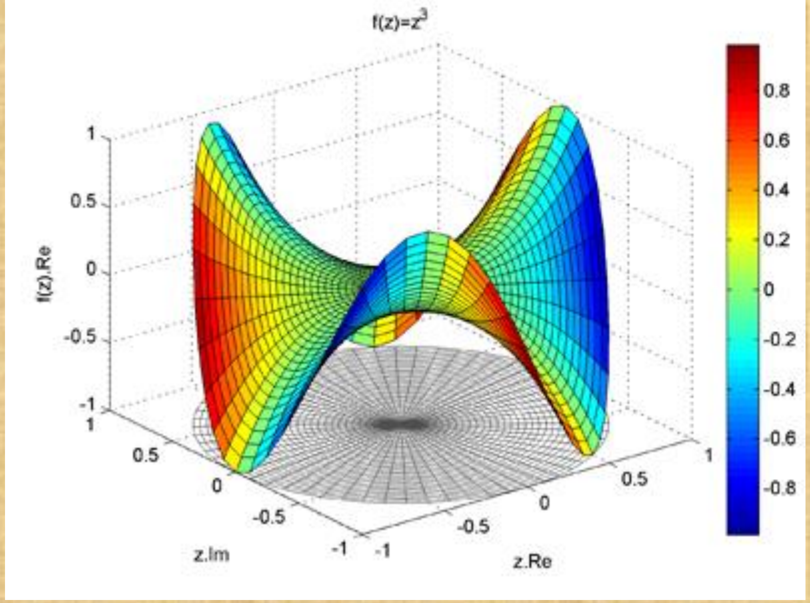


Интегрирование функции комплексной переменной

Риманова поверхность (комплексный логарифм)







План

1. Интегрирование функции комплексного переменного

   1.1 основные определения

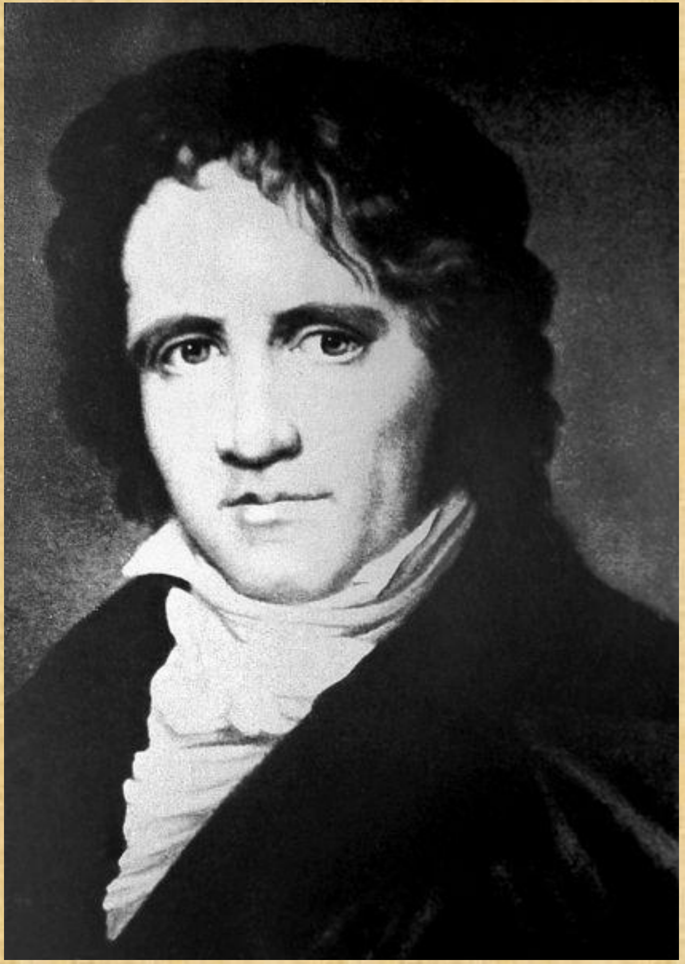
   1.2 свойства интегралов

2. Интегрирование ФКП

- **Развитие комплексного интегрирования** Проблема комплексного интегрирования в полном и совершенном виде была высказана Гауссом в его письме к Бесселю от 19 декабря **1811** г., которое, к сожалению, впервые было опубликовано вместе со всей перепиской двух ученых только в **1880** г.

Фридрих Вильгельм Бессель

(*Friedrich Wilhelm Bessel*; 22 июля 1784 – 17 марта 1846)



- Немецкий математик и астроном, ученик Карла Фридриха Гаусса

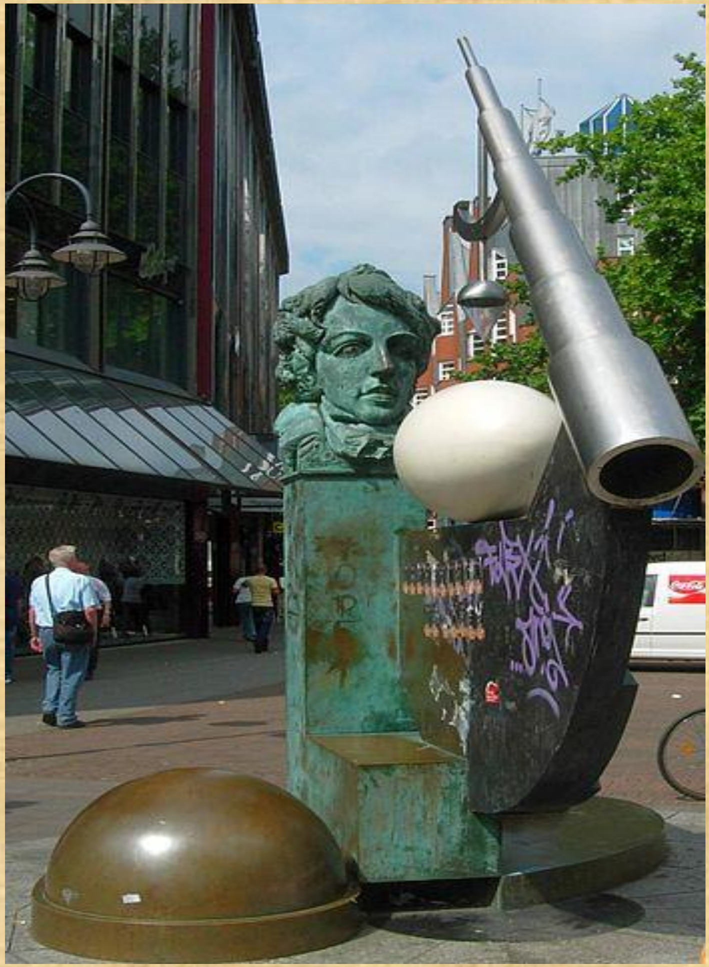
- Не обучавшись в гимназии и университете, получил докторскую степень Гёттингенского университета.
- Внёс большой вклад в изучение масштабов Вселенной.
- Проводил расчёты орбиты кометы Галлея.
- Определил положение **75000** звезд и создал обширные звездные каталоги.
- В 1841 году по данным многих измерений вычислил размеры земного эллипсоида, которые широко применялись в геодезии и картографии вплоть до середины XX века.
- В 1844 году предсказал наличие у Сириуса малоразличимой звезды – спутника.

Функции Бесселя применяются при решении многих задач о распространении волн, статических потенциалах и т. п., например:

- электромагнитные волны в цилиндрическом волноводе;
- теплопроводность в цилиндрических объектах;
- формы колебания тонкой круглой мембраны
- распределение интенсивности света при дифракции на круглом отверстии.
- скорость частиц в цилиндре, заполненном жидкостью и вращающемся вокруг своей оси.
- волновые функции в сферически симметричном потенциальном ящике.
- Функции Бесселя применяются и в решении других задач, например, при обработке сигналов.

Кратер Бесселя на Луне

Памятник Бесселю Бремене



1. Интегрирование функции комплексного переменного

- В «***Мемуаре об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами»*** Коши определяет интеграл по аналогии с интегралом от функции действительной переменной как предел интегральной суммы.
- Определенный им интеграл от комплексной функции является интегралом вдоль некоторой кривой и посредством уравнений этой кривой сводится к обыкновенному определенному интегралу

- Комплексный интеграл является своеобразным **сборником** интегралов:
- в общем случае он представляет собой пару криволинейных интегралов II рода (поскольку так определяется);
- иногда превращается в определенный интеграл, подчиняющийся, например, формуле Ньютона-Лейбница и допускающий интегрирование по частям.
- Иногда и в интегрировании нет необходимости: интеграл вычисляется по простой алгебраической формуле, а иногда итого проще: сразу видно, что он равен нулю.

Определения

- Кривая ***Г (гамма)*** называется *ГЛАДКОЙ,* если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную
- Кривая называется *КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ,* если она состоит из конечного числа гладких дуг
- Область ***D,*** ограниченная замкнутой и *не* самопересекающейся линией ***Г ,*** называется *ОДНОСВЯЗНОЙ*
- Если область ***D*** ограничена двумя замкнутыми НЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ И НЕ САМОПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ линиями , то область **D *называется двусвязной***
- Область ***D*** является ***двусвязной*** и в том случае, если внутренняя линия вырождается в точку или в дугу непрерывной линии

Примеры

Интегрирование ФКП по дуге

- Пусть в комплексной области ***C*** задана незамкнутая гладкая или кусочно-гладкая кривая ***Г*** или дуга ***AB***
- Определим направление на дуге, например, от точки ***A*** к точке ***B***.
- Разобьем дугу ***AB*** на ***n*** частей точками $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ на частичные дуги Δz_i
- Выберем на участках Δz_i разбиения произвольно точки z_i и составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot \Delta z_i$$

- ***Определение.*** Если существует конечный предел интегральной суммы, и он не зависит ни от разбиения дуги на участки, ни от выбора точек на участках разбиения, то при условии $\max \Delta z_i \to 0$ этот предел называется ИНТЕГРАЛОМ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО (ФКП) по дуге ***AB*** и обозначается

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta z_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\cdot \Delta z_i$$

- Пусть ***Г –*** кусочно-гладкая линия , состоящая из гладких частей ***Г 1, Г2, .., Гm ;*** тогда интеграл по этой линии определяется с помощью равенства:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + .. + \int_{\Gamma_m} f(z)dz$$

- Если ***f(z)*** – аналитическая функция в односвязной области ***D,*** то значение интеграла $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$, взятого вдоль

произвольной кусочно-гладкой линии ***Г ,*** принадлежащей области ***D, не зависит от линии Г, а определяется лишь положениями начальной и конечной точек этой линии***

- Зависимость между подынтегральной функцией $f(z)$ и интегралом (первообразной) комплексной функции

$$\Phi(z)$$

остаётся такой же, как и в случае вещественного переменного:

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = f(z)$$

- Сохраняется и обычная формула (формула Ньютона – Лейбница) для вычисления интеграла:

$$\int_{z_{нач}}^{z_{кон}} f(z)\cdot dz = \Phi(z_{кон}) - \Phi(z_{нач})$$

Свойства интегралов по комплексному аргументу

Пусть C - контур интегрирования, тогда

1) $\int\limits_C f(z)dz = -\int\limits_{-C} f(z)dz$

2) $\int\limits_C (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int\limits_C f_1(z)dz \pm \int\limits_C f_2(z)dz$

3) $\int\limits_C k \cdot f(z)dz = k \cdot \int\limits_C f(z)dz$, где $k = const$

4) если $C = C_1 + C_2$

$\int\limits_C f(x;y)dl = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz$

И другие свойства

- Существует несколько способов вычисления интегралов в комплексной плоскости:
- 1. Интеграл вычисляется сведением к криволинейным интегралам от функций действительных переменных
- 2. Интеграл вычисляется сведением к определённому интегралу (путь интегрирования задается в параметрической форме $z = z(t)$
- 3. вычисление интегралов от аналитических функций в односвязных областях

Первый способ.

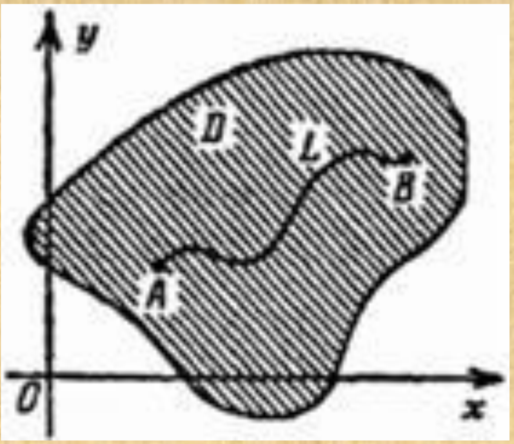
Вычисление интеграла функции комплексного переменного по дуге через криволинейный интеграл II рода.

- **Теорема.** Пусть

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

определена на дуге ***AB.***

Тогда



$$\int\limits_{AB} f(z)dz=\int\limits_{AB} u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int\limits_{AB} v(x,y)dx+u(x,y)dy$$

- ***Доказательство.*** Так как

$$z = x + i\cdot y \qquad и \qquad dz = dx + idy,$$

тогда

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB}(u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy) =$$

$$= \int_{AB} u(x,y)dx + iv(x,y)dx + iu(x,y)dy + i^2 v(x,y)dy$$

Далее после выделения действительной и мнимой части криволинейного интеграла получаем:

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{AB} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

Что и требовалось доказать

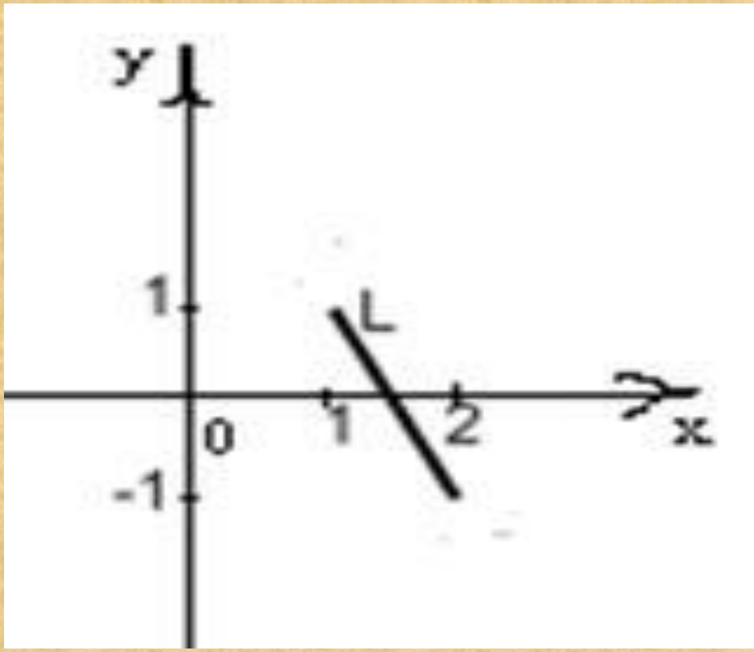
***Замечание*.**

- Из теоремы следует, что вычисление интеграла функции комплексного переменного сводится к вычислению двух криволинейных интегралов II рода от функций двух действительных переменных.
- Для нахождения первообразной функции по отношению к аналитической функции ***f(z)*** ***применяются обычные формулы интегрирования***
- Для интеграла ***ФКП*** по дуге справедливы все свойства криволинейного интеграла II рода функции двух действительных переменных.

Пример 1.

Вычислить $\int\limits_L \operatorname{Re} z dz$, **где *L* – прямая от**

точки до точки $z_1 = 1 + i$ **до точки** $z_2 = 2 - i$



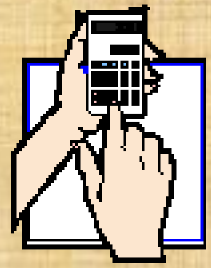
$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{AB} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

Решение

$$\int_L \operatorname{Re} z dz = \left| \begin{array}{c} \operatorname{Re} z = u(x,y) = x \\ v(x,y) = 0 \\ dz = dx + idy \end{array} \right| = \int_L xdx + i\int_L xdy =$$

$$= \int_L xdx + ixdy = \left| \begin{array}{c} \textit{найдём} \quad \textit{уравнение} \quad L = AB \\ \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \; \textit{по} \quad \textit{условию} \quad A(1;1), \quad B(2;-1) \\ \dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-1}{-1-1} \\ y = -2x + 3 \quad dy = -2dx \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^2 xdx - 2ixdx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - ix^2\Big|_1^2 = \frac{3}{2} - 3i$$



Пример 2

Вычислить интеграл

$$\int\limits_C (z - \operatorname{Im} z)\,dz\ ,$$

где C – отрезок прямой *OM* от точки *O*(0,0) до точки *M*(2,-2)

Решение

- Подынтегральное выражение имеет вид:

$$(z - \operatorname{Im} z)dz = (x + yi - y)(dx + idy) =$$

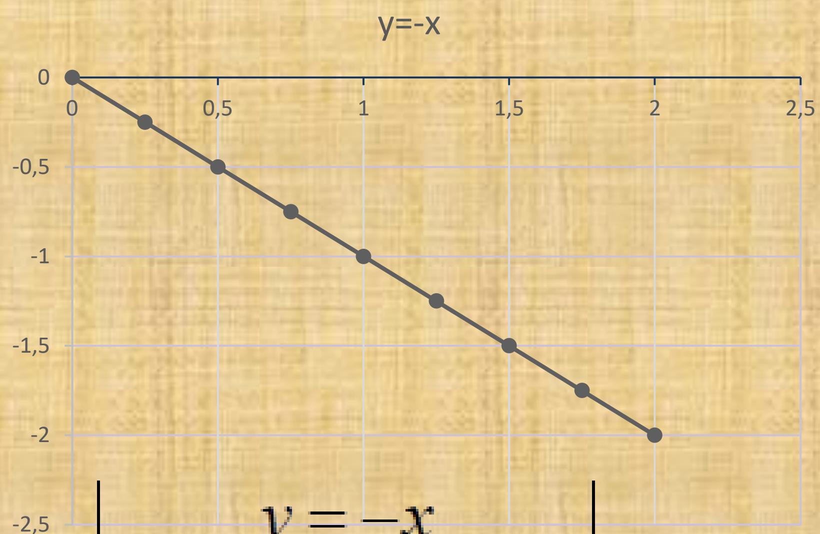
$$= xdx + iydx - ydx + ixdy - ydy - iydy =$$

$$= xdx - ydx - ydy + iydx + ixdy - iydy =$$

$$= (x - y)dx - ydy + iydx + i(x - y)dy$$

- Таким образом, получаем:

$$\int_C (z - \operatorname{Im} z)dz = \int_C (x - y)dx - ydy + i\int_C ydx + (x - y)dy$$

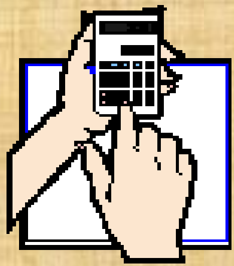


$$I=\left|\begin{array}{c} y=-x \\ dy=-dx \\ x_1=0, \quad x_2=2 \end{array}\right|=\int_C (x-y)dx-ydy+i\int_C (ydx+(x-y)dy)=$$

$$=\int_0^2 (x+x)dx-xdx+i\int_0^2 (-xdx-(x+x)dx=\int_0^2 xdx-3i\int_0^2 xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2-\frac{3}{2}ix^2\Big|_0^2=2x-6i$$

ОТВЕТ: $\int_C (z-\operatorname{Im} z)dz=2x-6i$



Пример 3.

Вычислить интеграл $\int\limits_C z^5 dz$, где С – дуга окружности $|z| = \sqrt{6}$,

лежащая между двумя лучами $\arg z = \dfrac{\pi}{12}$ $\quad u \quad$ $\arg z = \dfrac{7}{12}\pi$.

Обход производится в положительном направлении

Решение

В показательной форме подынтегральная функция имеет вид:

$$z^5 = r^5 e^{5\varphi i}$$

Дифференциал равен:

$$dz = d(re^{\varphi i}) = re^{i\varphi} i d\varphi$$

Подынтегральное выражение имеет вид:

$$z^5 dz = r^6 e^{6i\varphi} i d\varphi$$

По условию $r = |z| = \sqrt{6}$, тогда

$$z^5 dz = r^6 e^{6i\varphi} i d\varphi = \sqrt{6}^6 \cdot e^{6i\varphi} i d\varphi = 6^3 \cdot e^{6i\varphi} d(i\varphi)$$

Аргумент φ меняется в пределах от $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{12}$ $\quad до \quad$ $\varphi_2 = \dfrac{7}{12}\pi$

Вычислим интеграл:

$$\int\limits_C z^5 dz = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7}{12}\pi} 6^3 \cdot e^{6i\varphi} d(i\varphi) = 6^3 \cdot \frac{1}{6} e^{6i\varphi} \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{7}{12}\pi} =$$

$$= 36\left(e^{i\frac{7}{2}\pi} - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \left|\begin{array}{c} e^{iz} = \cos z + i\sin z \\ e^{i\frac{7}{2}\pi} = \cos\frac{7\pi}{2} + i\sin\frac{7\pi}{2} = -i \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \end{array}\right| = 36(-i - i) = -72i$$

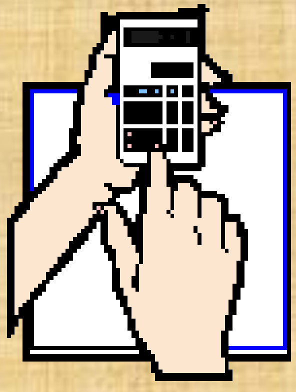
Второй способ

- При параметрическом задании функции

$$z = z(t)$$

используется формула

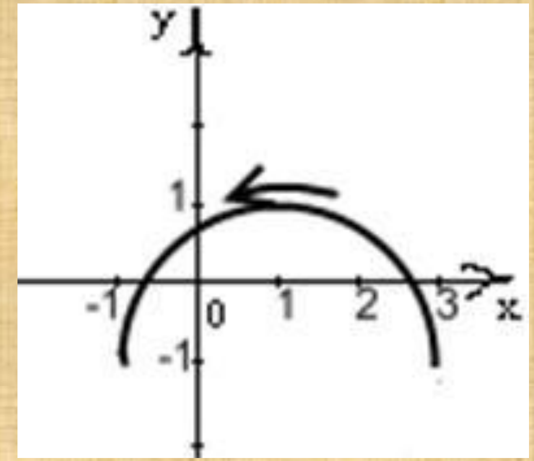
$$\int_C f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot z'(t)dt$$



- ***Пример 4.*** Вычислить $\int\limits_L z \cdot \bar{z} \cdot dz$,

  где ***L*** – полуокружность $\begin{cases} z = 1 - i + 2e^{it} \\ \operatorname{Im} z > -1 \end{cases}$, причем

  обход совершается против часовой стрелки



Решение

$$\int_L z\cdot\bar{z}\cdot dz=\left|\begin{array}{l} z=1-i+2e^{it} \\ \bar{z}=1+i+2e^{-it} \\ dz=2ie^{it}dt \\ t_1=0 \quad t_2=\pi \end{array}\right|=\int_0^{\pi}(1-i+2e^{it})(1+i+2e^{-it})2ie^{it}dt=$$

$$=\int_0^{\pi}(12ie^{it}+4ie^{2it}-4e^{2it}+4i+4)dt=-24+4\pi+4\pi\cdot i$$

$$\textit{так} \quad \textit{как} \qquad e^{zi}=\cos z+i\sin z,$$

$$\textit{то} \quad e^{\pi i}=-1, \quad e^{2\pi i}=1$$

Интеграл комплексной переменной по замкнутому контуру

- Особый практический интерес представляют интегралы по (замкнутому) контуру, то есть по кусочно-гладкой кривой без точек самопересечения, у которой начальная точка совпадает с конечной.
- Контур можно обходить в двух направлениях; положительным считается направление, при котором ограниченная контуром область располагается слева по ходу движения.

Теоремы Коши

1) Для всякой аналитической функции ***f(z)* в *некоторой односвязной*** области **D** интеграл

$$\int_L f(z)dz$$

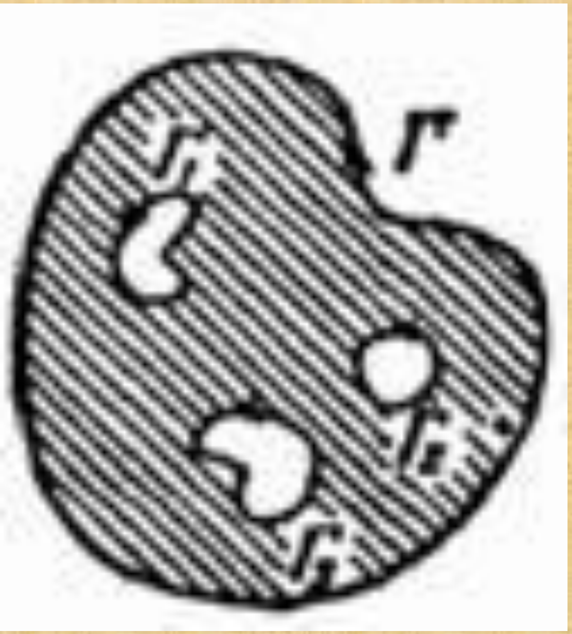
,

взятый по любому ***ЗАМКНУТОМУ*** кусочно-гладкому контуру L , лежащему в области ***D,***

равен нулю:

$$\oint_L f(z)dz = 0$$

2) *Теорема.* Пусть область D ограничена внешним контуром Г , ориентированным против часовой стрелки, и внутренними контурами $Г_1$, $Г_2$,…,$Г_{\mathbf{N}}$, ориентированными тоже против часовой стрелки (как на рис., где N=3), и пусть на задана аналитическая функция ***f(z)***



- ***Тогда имеет место равенство***

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma} f(z)dz$$

Интегральная формула Коши

- **Интегральная формула Коши** — соотношение для голоморфных функций комплексного переменного, связывающее значение функции в точке с её значениями на контуре, окружающем точку.
- Эта формула выражает одну из важнейших особенностей комплексного анализа: значение в *любой* точке внутри области можно определить, зная значения на её границе.

Пусть D — область на комплексной плоскости с кусочно-гладкой границей , функция f(z) голоморфна в D , и z_0 — точка внутри области D.

Тогда справедлива следующая формула Коши:

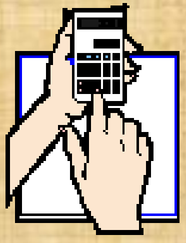
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

Формула справедлива также, если предполагать, что f(z) голоморфна внутри D и непрерывна на замыкании, а также если граница D не кусочно-гладкая, а всего лишь спрямляемая.

Замечание

- С помощью этой формулы можно вычислять некоторые криволинейные интегралы по замкнутым контурам для подынтегральной функции специального вида:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$



Пример 5

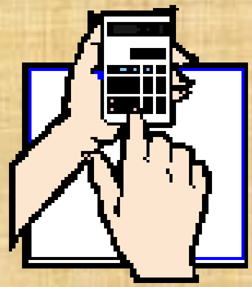
- Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{e^z}{z(z-3)}dz$, где С-

окружность с радиусом 3/2 и центром в т. 2

Решение

Используем формулу $\oint\limits_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$

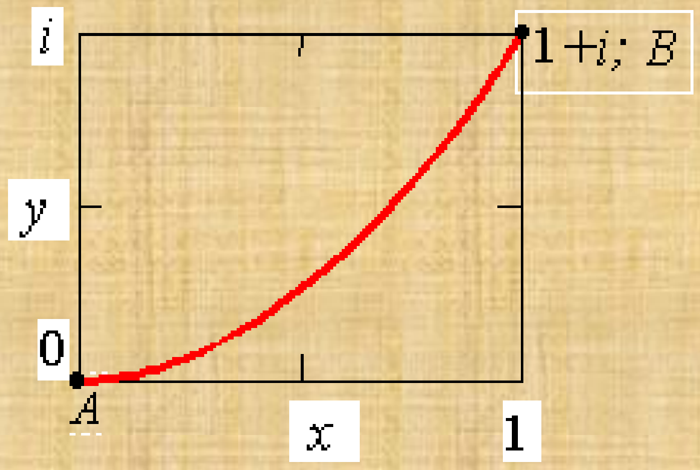
$$\oint\limits_C \frac{e^z}{z(z-3)}dz = \left| \begin{array}{c} f(z) = \frac{e^z}{z} \\ z_0 = 3 \end{array} \right| = 2\pi i \cdot \frac{e^3}{3} = \frac{2}{3}\pi e^3 i$$



Примеры 6

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

$$\int\limits_{AB} (3z^2 + 2z)dz, \qquad AB = \begin{cases} z = x + iy \\ y = x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



Решение

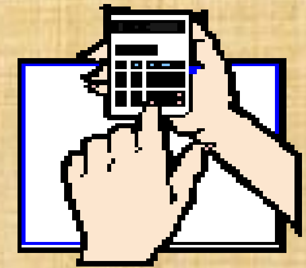
Подынтегральная функция аналитическая на всей

комплексной плоскости.

Используем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_{нач}}^{z_{кон}} f(z)\cdot dz = \Phi(z_{кон}) - \Phi(z_{нач})$$

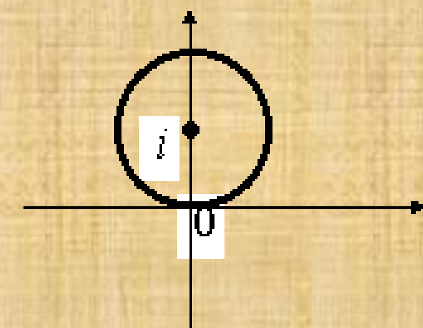
$$\int_{AB} (3z^2 + 2z)dz = \int_0^{1+i} (3z^2 + 2z)dz = z^3\Big|_0^{1+i} + z^2\Big|_0^{1+i} = (1+i)^3 + (1+i)^2 =$$
$$= 1 + 3i + 3i^2 + i^3 + 1 + 2i + i^2 = 1 - 3 + 1 - 1 + 5i - i = -2 + 4i$$



Пример 7

С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы:

$$\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{z^2}{1+z^2}\,dz$$



РЕШЕНИЕ

Используем формулу: $\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$

$$\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{z^2}{1+z^2}dz = \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{z^2}{z^2-i^2}dz = \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{z^2}{(z-i)(z+i)}dz$$

$$\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{z^2}{(z-i)(z+i)}dz = \left| \begin{array}{c} f(z) = \dfrac{z^2}{z+i} \\ z_0 = i \end{array} \right| = 2\pi i \cdot \frac{i^2}{2i} = -\pi$$