ЛЕКЦИЯ 18
ТФКП: «РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ (ОБЛАСТИ)»

ПЛАН

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ
2. СТЕПЕННЫЕ, СВОДЯЩИЕСЯ К НИМ И ДВУСТОРОННИЕ РЯДЫ
3. РЯД ТЕЙЛОРА
4. РЯД ЛОРАНА

1. Понятие числового ряда. Основные теоретические сведения

- ***Определение*:** Числовым рядом называется бесконечная последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$

  соединенная знаком сложения:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

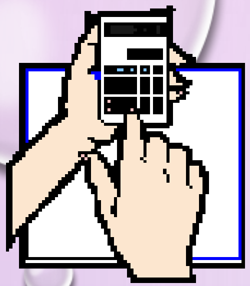
ТЕОРЕМА. Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы сходились оба ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

Замечание: ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ являются рядами с действительными членами и вопрос об их сходимости решается с помощью признаков сходимости рядов в действительной области



ПРИМЕР 1. ИССЛЕДОВАТЬ НА СХОДИМОСТЬ РЯД $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$

- **РЕШЕНИЕ**

<u>1-й способ</u>

По формуле Эйлера имеем $e^{in} = \cos n + i \sin n$

Т.О. вопрос о сходимости данного ряда сводится к вопросу

о сходимости рядов с действительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

Каждый из этих рядов сходится абсолютно, след-но, и

заданный ряд сходится абсолютно

2-й способ

Исследуем ряд на абсолютную сходимость, то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|e^{in}\right|}{n^2}$$

Но $\left|e^{in}\right| = \left|\cos n + i \sin n\right| = 1$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|e^{in}\right|}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

который сходится абсолютно

2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Определение 1: Ряд вида

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n ,$$

где $c_0, c_1, c_2, .., c_n - \quad \textit{комплексные} \quad \textit{постоянные}$,

$z - \quad \textit{комплексная} \quad \textit{переменная}$, называется степенным рядом в комплексной области

<u>Определение 2:</u> Ряд вида

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

называется степенным рядом общего вида

<u>Определение 3:</u> Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}$

называется рядом, сводящимся к степенному ряду общего вида

<u>Определение 4:</u> Двусторонним называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ

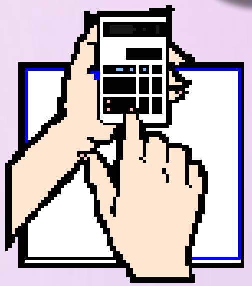
Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ есть круг с центром в начале координат: $|z| < R,\ где \quad R - \quad радиус \quad сходимости$

Так же используются формулы:

1) $$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

2) $$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$$

ПРИМЕР 2. НАЙТИ РАДИУС СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n \cdot z^n$



Решение. Найдём модуль коэффициента

$$c_n = (1+i)^n$$

$$|c_n| = |(1+i)|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}$$

Используем формулу: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$

Находим: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{\frac{n}{2}}}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. **<u>Ряд Тейлора.</u>**

Функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в точке $z=a$

разлагается (т.е. является суммой) в окрестности этой

точки в степенной ряд – ряд Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}},(n=0,1,2,..)$$

Здесь $\Gamma-$ окружность с центром в точке $z=a$, целиком

лежащая в области аналитичности $f(z)$

Областью сходимости ряда является круг с центром в точке

расположения радиуса R, равном расстоянию от центра

расположения до ближайшей особой точки – точки, в которой

функция $f(z)$ теряет свою аналитичность

Теорема Тейлора. Функция $f(z)$, аналитическая в круге

$z - a| < R$ однозначно представима в нём своим рядом Тейлора,

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, (n = 0,1,2,..)$$

Из этой теоремы и о возможности дифференцирования степенного ряда любое число раз следует, что разложение функции в степенной ряд единственно.

При $a = 0$ **ряд Тейлора называется рядом Маклорена**

При решении многих задач используют

следующие разложения элементарных функций:

1. $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in (z)$$

2. $$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, |z| < 1$$

3. $$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n \cdot z^n + \ldots, |z| < 1$$

Пример 3. Разложить в ряд по степеням $(z+3)$

функцию $f(z)=\ln(2+5z)$

Решение

Будем использовать разложение функции $\ln(1+z)$

Приведём заданную функцию к табличному виду:

$$2-5z=2-5(z+3)+15=17-5(z+3)=$$

$$=17\left(1-\frac{5}{17}(z+3)\right)$$

$$\ln 17\left(1-\frac{5}{17}(z+3)\right)=\ln 17+\ln\left(1-\frac{5}{17}(z+3)\right)$$

замена переменной

$$u=-\frac{5}{17}(z+3),|u|<1 \quad \Rightarrow \frac{5}{17}|z+3|<1\Rightarrow |z+3|<\frac{17}{5}$$

$$\ln(1+u)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{u^n}{n}, |u|<1$$

$$\ln(2-5z)=\ln 17+\ln\left(1-\frac{5}{17}(z+3)\right)=$$

$$=\ln 17+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(-\frac{5}{17}(z+3)\right)^n}{n}=$$

$$=\ln 17-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{17}\right)^n\frac{(z+3)^n}{n}$$

Пример 4. Разложить в ряд по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{1}{2z+5}$$

Решение

Будем использовать разложение функции $\frac{1}{1+z}$

Приведём заданную функцию к табличному виду:

$$\frac{1}{5+2z}=\frac{1}{5\left(1+\frac{2}{5}z\right)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+u},$$

$$где \quad u=\frac{2}{5}z, \qquad \left|\frac{2}{5}z\right|<1$$

Получаем:

$$\frac{1}{5+2z}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2}{5}z\right)}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2}{5}z\right)^n,|z|<\frac{5}{2}$$

4. РЯДЫ ЛОРАНА

Определение. Ряд вида

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$$

При этом ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ называется правильной частью,

а ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}$ - главной частью ряда

Лорана

Если $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}=r<R=\dfrac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$, то областью сходимости

является кольцо $0\le r<|z-a|<R$

Сумма ряда Лорана является

аналитической функцией в этом кольце

§15. Ряды Лорана.

$$\overbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}^{\text{ряд Лорана}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{P(z)\text{- правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{Q(z)\text{- главная часть}}$$

ример 2. Разложить в **ряд Лорана** функцию

hysics.karazin.ua›doc/chairs/k_hm/k_hm_pk/15/15_…

екция № 8. **Ряды** и особые точки. **Ряд Лорана**. ... **Лекция** № 8. Рис. 6.2. Разумеется, получить разложение в **ряд Лорана** нашей функции можно, если вычислить в каждой из областей соответствующие коэффициенты разложе

- ПРИМЕР 2. РАЗЛОЖИТЬ В РЯД ЛОРАНА ФУНКЦИЮ
- PHYSICS.KARAZIN.UA›DOC/CHAIRS/K_HM/K_HM_PK/15/15_…
- ЛЕКЦИЯ № 8. РЯДЫ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ. РЯД ЛОРАНА. ... ЛЕКЦИЯ № 8. РИС. 6.2. РАЗУМЕЕТСЯ, ПОЛУЧИТЬ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ЛОРАНА НАШЕЙ ФУНКЦИИ МОЖНО, ЕСЛИ ВЫЧИСЛИТЬ В КАЖДОЙ ИЗ ОБЛАСТЕЙ СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗЛОЖЕНИЯ. ОДНАКО, ЭТО ДОСТАТОЧНО СЛОЖНАЯ И КРОПОТЛИВАЯ РАБОТА. А ПОТОМУ В ДАННОМ... ЧИТАТЬ ЕЩЁ