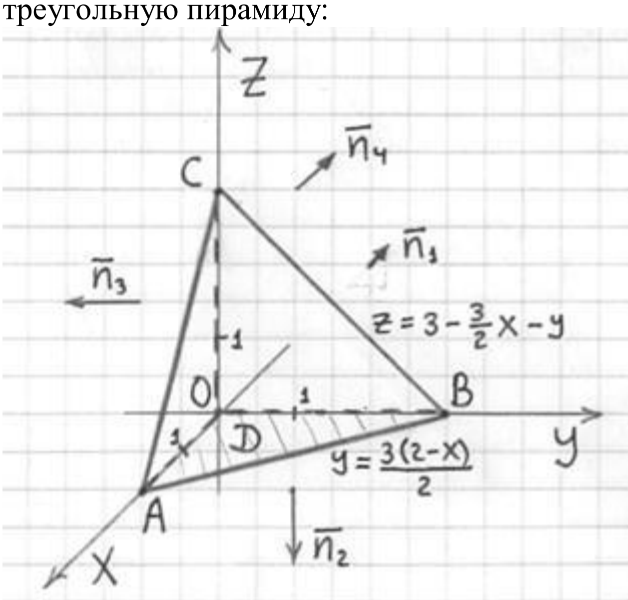
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТОКА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ ПИРАМИДЫ

ЗАДАЧА. Найти поток векторного поля $\overline{F}(x;y;z)=4z\overline{i}+(x-y-z)\overline{j}+(3y+z)\overline{k}$ через замкнутую поверхность, ограниченную плоскостью $3x+2y+2z=6$ и координатными плоскостями, в направлении внешней нормали

Решение начинаем с чертежа. Перепишем **уравнение плоскости** **в отрезках**

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ и изобразим предложенную поверхность, которая представляет собой треугольную пирамиду:



По условию, поверхность *ориентирована* в направлении внешней нормали, и поэтому к обозначению пирамиды добавляется условную стрелочку: $OABC\rightarrow$.

Поток векторного поля вычислим с помощью поверхностного интеграла 2-го рода, и так как поверхность замкнута, то к его обозначению обычно добавляют символический кружочек:

$\Pi=\oiint\limits_{OABC\rightarrow}\overline{F}(x;y;z)d(OABC\rightarrow)$ или $\Pi=\oiint\limits_{\overline{\sigma}}\overline{F}(x;y;z)d\overline{\sigma}$, подразумевая под чёрточкой внешнее направление.

Заметим, что три грани пирамиды «смотрят» против координатных осей!

Наглядно задачу можно перефразировать так: представьте, что пирамида ограничивает фрагмент водного русла. Требуется выяснить, сколько жидкости туда поступило/вытекло в единицу времени.

И, очевидно, что здесь придётся воспользоваться *свойством аддитивности* потока, то есть представить его в виде **суммы** четырёх поверхностных интегралов по *ориентированным* граням пирамиды:

$\Pi=\oiint\limits_{OABC\rightarrow}\overline{F}(x;y;z)d(OABC\rightarrow)=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4$, где:

$$\Pi_1 = \iint\limits_{ABC\to} \overline{F}(x;y;z)d(ABC\to)$$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{OAB\to} \overline{F}(x;y;z)d(OBA\to)$$

$$\Pi_3 = \iint\limits_{OAC\to} \overline{F}(x;y;z)d(OAC\to)$$

$$\Pi_4 = \iint\limits_{OCB\to} \overline{F}(x;y;z)d(OCB\to)$$

Можно тоже использовать короткие обозначения $\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3, \overline{\sigma}_4$.

1) Вычислим поток векторного поля через ориентированный треугольник ABC в направлении нормального вектора $\overline{n}_1$.

   Поскольку внешняя нормаль образует с полуосью OZ_+ острый угол, то для нахождения единичного нормального вектора используем формулу:

$$\overline{n}_1 = \frac{-z'_x\overline{i} - z'_y\overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}$$

Запишем функцию плоскости ABC:

$$3x + 2y + 2z = 6 \quad \Rightarrow \quad 2z = 6 - 3x - 2y \quad \Rightarrow \quad z = 3 - \frac{3}{2}x - y$$

и найдём частные производные 1-го порядка:

$$z'_x = -\frac{3}{2}, \quad z'_y = -1$$

Таким образом:

$$\overline{n}_1 = \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right)\overline{i} - (-1)\overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 1}} = \frac{\frac{3}{2}\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{\frac{9}{4} + 1 + 1}} = \frac{\frac{3}{2}\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{\frac{17}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{17}}\left(\frac{3}{2}\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}\right) = \frac{3}{\sqrt{17}}\overline{i} + \frac{2}{\sqrt{17}}\overline{j} + \frac{2}{\sqrt{17}}\overline{k}$$

Убедимся, что его длина действительно равна единице:

$$|\overline{n}_1| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{17} + \frac{4}{17} + \frac{4}{17}} = \sqrt{\frac{17}{17}} = \sqrt{1} = 1$$

\- ВЕРНО!

Вычислим скалярное произведение:

$$\overline{F}\cdot\overline{n}_1 = \left[4z\cdot\frac{3}{\sqrt{17}} + (x - y - z)\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} + (3y + z)\cdot\frac{2}{\sqrt{17}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}}(12z + 2x - 2y - 2z + 6y + 2z) = \frac{1}{\sqrt{17}}(2x + 4y + 12z) = \frac{2}{\sqrt{17}}(x + 2y + 6z)$$

и сведём решение к вычислению поверхностного интеграла 1-го рода:

$$\Pi_1 = \iint\limits_{ABC\to} \overline{F}(x;y;z)d(ABC\to) = \iint\limits_{ABC} (\overline{F}\cdot\overline{n}_1)d(ABC) = \frac{2}{\sqrt{17}}\iint\limits_{ABC}(x+2y+6z)d(ABC) = (*)$$

Теперь используем формулу $\iint\limits_{\sigma} f(x;y;z)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x;y;z(x;y))\cdot\sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}\,dxdy$, где D – проекция поверхности «сигма» на плоскость XOY. Напоминаю, что интеграл 1-го рода можно вычислить ещё двумя способами, но во избежание путаницы (опять же) лучше пойти привычным путём:

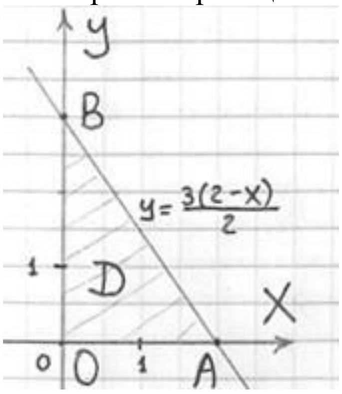
$$(*) = \frac{2}{\sqrt{17}}\iint\limits_{D}\left(x+2y+6\left(3-\frac{3}{2}x-y\right)\right)\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D}(x+2y+18-9x-6y)dxdy = \iint\limits_{D}(-8x-4y+18)dxdy = (*)$$

Осталось вычислить двойной двойной интеграл. Найдём прямую, по которой по пересекаются плоскости ABC и XOY:

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=6 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow\ 3x+2y=6\ \Rightarrow\ 2y=6-3x\ \Rightarrow\ y=\frac{3(2-x)}{2}$$

и изобразим проекцию D на двумерном чертеже (не ленимся!!!):



$$0 \le y \le \frac{3(2-x)}{2}$$

$$0 \le x \le 2$$

Продолжаем:

$$(*) = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{3(2-x)}{2}} (-8x-4y+18)dy$$

Повторные интегралы удобнее вычислить по порядку. Сначала внутренний:

$$\int_0^{\frac{3(2-x)}{2}}(-8x-4y+18)dy=(-8xy-2y^2+18y)\Big|_0^{\frac{3(2-x)}{2}}=$$

$$=\left(-8x\cdot\frac{3(2-x)}{2}-2\cdot\frac{9}{4}(2-x)^2+18\cdot\frac{3(2-x)}{2}\right)-(-0-0+0)=$$

$$=\left(-24x+12x^2-\frac{9}{2}(2-x)^2+27(2-x)\right)$$

затем внешний:

$$\int_0^2\left(-24x+12x^2-\frac{9}{2}(2-x)^2+27(2-x)\right)dx=$$

$$=\int_0^2(-24x+12x^2)dx-\frac{9}{2}\int_0^2(2-x)^2dx+27\int_0^2(2-x)dx=$$

$$=(-12x^2+4x^3)\Big|_0^2-\frac{9}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(2-x)^3\Big|_0^2+27\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(2-x)^2\Big|_0^2=$$

$$=(-48+32-0)+\frac{3}{2}(0-8)-\frac{27}{2}(0-4)=$$

$$=-16-12+54=26$$

Готово. Обратите внимание на рациональную технику вычисления и оформления.

Для лучшего понимания задачи продолжим вкладывать в решение гидродинамический смысл. Что означает полученный результат $\Pi_1=26$? Он означает, что за единицу времени через треугольник ABC в направлении вектора $\overline{n}_1$ прошло 26 единиц жидкости.

Оставшиеся три интеграла вычислить проще:

2) Найдём поток векторного поля через *ориентированный* треугольник OBA . Единичный вектор нормали тут очевиден: $\overline{n}_2=-\overline{k}$ или $\overline{n}_2(0;\,0;\,-1)$. Вычислим скалярное произведение:

$$\overline{F}\cdot\overline{n}_2=\left[4z\cdot 0+(x-y-z)\cdot 0+(3y+z)\cdot(-1)\right]=-(3y+z)$$

и перейдём к поверхностному интегралу 1-го рода

$$\Pi_2=\iint\limits_{OBA\to}\overline{F}(x;y;z)d(OBA\to)=\iint\limits_{OBA}(\overline{F}\cdot\overline{n}_2)d(OBA)=-\iint\limits_{OBA}(3y+z)d(OBA)=(*)$$

Так как поверхность лежит непосредственно в плоскости XOY , то формула

$$\iint\limits_{\sigma}f(x;y;z)d\sigma=\iint\limits_{D}f(x;y;z(x;y))\cdot\sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}\,dxdy$$

сильно упрощается – ведь «зет» и её производные равны нулю. Двойной интеграл возьмём по тем же пределам интегрирования:

$$(*) = -\iint_D (3y+0)dxdy = -3\int_0^2 dx \int_0^{\frac{3(2-x)}{2}} ydy = -\frac{3}{2}\int_0^2 (y^2)\Big|_0^{\frac{3(2-x)}{2}} dx = -\frac{3}{2}\int_0^2 \left(\frac{9}{4}(2-x)^2 - 0\right)dx =$$

$$= -\frac{27}{8}\int_0^2 (2-x)^2 dx = -\frac{27}{8}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(2-x)^3\Big|_0^2 = \frac{9}{8}(0-8) = -9$$

Отрицательное значение $\varPi_2 = -9$ означает, что за единицу времени через треугольник OBA по итогу прошло 9 единиц жидкости **против** вектора $\overline{n}_2$ (то есть, поступило внутрь пирамиды).

3) **Вычислим поток векторного поля через *ориентированный* треугольник** OAC **.**

Внешняя нормаль здесь тоже как на ладони: $\overline{n}_3 = -\overline{j}$ или $\overline{n}_3(0;-1;0)$. Скалярное произведение:

$$\overline{F}\cdot\overline{n}_3 = [4z\cdot 0 + (x-y-z)\cdot(-1) + (3y+z)\cdot 0] = -(x-y-z) = (z+y-x)$$

и стандартный переход:

$$\varPi_3 = \iint_{OAC\to} \overline{F}(x;y;z)d(OAC\to) = \iint_{OAC} (\overline{F}\cdot\overline{n}_3)d(OAC) = \iint_{OAC}(z+y-x)d(OAC) = (*)$$

Поскольку треугольник OAC лежит в плоскости XOZ, то используем формулу

$$\iint_\sigma f(x;y;z)d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x;y(x;z);z)\cdot\sqrt{(y'_x)^2+(y'_z)^2+1}\,dxdz$$

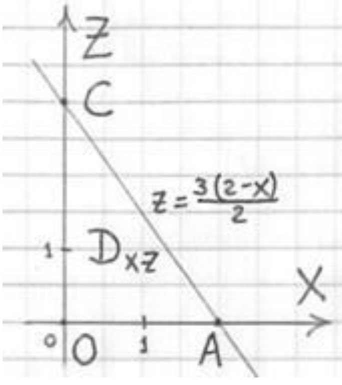
, в которой поверхность σ совпадает со своей проекцией D_{xz} на плоскость XOZ, а функция $y(x;z)$ вместе со своими производными равна нулю:

$$(*) = \iint_{D_{xz}} (z+0-x)\sqrt{0^2+0^2+1}\,dxdz = \iint_{D_{xz}}(z-x)dxdz = (*)$$

Найдём прямую, по которой пересекаются плоскости:

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=6 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 3x+2z=6 \Rightarrow 2z=6-3x \Rightarrow z=\frac{3(2-x)}{2}$$

и выполним двумерный чертёж:



По размерам треугольник равен предыдущему, но это только размеры. Выберем следующий порядок обхода области:

$$0 \le z \le \frac{3(2-x)}{2}$$

$$0 \le x \le 2$$

и перейдём к повторным интегралам:

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\frac{3(2-x)}{2}} (z-x)dz$$

Внутренний:

$$\int_0^{\frac{3(2-x)}{2}} (z-x)dz = \left(\frac{z^2}{2} - xz\right)\Bigg|_0^{\frac{3(2-x)}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}(2-x)^2 - x\cdot\frac{(6-3x)}{2} = \frac{9}{8}(2-x)^2 + \frac{3}{2}x^2 - 3x$$

и внешний:

$$\int_0^2 \left(\frac{9}{8}(2-x)^2 + \frac{3}{2}x^2 - 3x\right)dx = \frac{9}{8}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(2-x)^3\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{3}{8}(0-8) + 4 - 6 = 3 - 2 = 1$$

Результат $\Pi_3 = 1$ означает, что за единицу времени через плоскость OAC протекла 1 единица жидкости **в направлении** вектора $\overline{n}_3$ (убыла из пирамиды).

4) И, наконец, поток векторного поля через грань OCB по внешнему направлению $\overline{n}_4 = -\overline{i}$
Скалярное произведение:

$$\overline{F}\cdot\overline{n}_4 = [4z\cdot(-1) + (x-y-z)\cdot 0 + (3y+z)\cdot 0] = -4z$$

и ещё раз переход:

$$\Pi_4 = \iint_{OCB\rightarrow} \overline{F}(x;y;z)d(OCB\rightarrow) = \iint_{OCB} (\overline{F}\cdot\overline{n}_3)d(OCB) = -4\iint_{OCB} zd(OCB) = (*)$$

Поскольку треугольник находится в плоскости YOZ, то пускаем в ход формулу

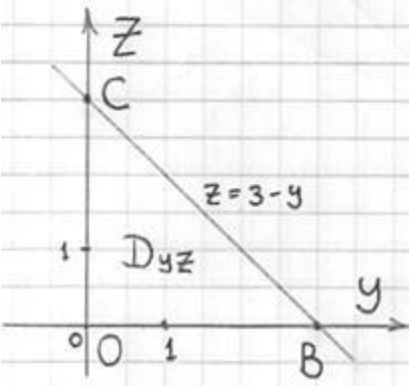
$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_{YZ}} f(x(y;z);y,z)\cdot\sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1}dydz$$

, где функция $x(y;z)$ и её производные равны нулю:

$$(*) = -4\iint_{D_{YZ}} z\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + 1}dydz = -4\iint_{D_{YZ}} zdydz = (*)$$

Найдём линию пересечения плоскостей и выполним двумерный чертёж:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 6 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 2y + 2z = 6 \quad \Rightarrow \quad z = 3 - y$$



Выберем следующий порядок обхода области:

$0 \le z \le 3 - y$

$0 \le y \le 3$

$$(*) = -4\int_0^3 dy \int_0^{3-y} z dz = -4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^3 (z^2)\Big|_0^{3-y} dy = -2\int_0^3 (3-y)^2 dy =$$

$$= -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)(3-y)^3\Big|_0^3 = \frac{2}{3}(0-27) = -18$$

Отрицательное значение $\Pi_4 = -18$ означает, что за единицу времени через треугольник OCB по итогу протекло 18 единиц жидкости **против** направления вектора $\overline{n}_4$ (т.е. внутрь пирамиды).

Ну что же, вот и настал этот знаменательный момент. Вычислим поток векторного поля через всю пирамиду по направлению внешних нормалей:

$$\Pi = \oiint_{OABC\rightarrow} \overline{F}(x; y; z) d(OABC \rightarrow) = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = 26 - 9 + 1 - 18 = 0$$

Ответ: $\Pi = 0$

В ходе длинного-длинного решения нами был получен ответ $\Pi = 0$, что в рамках условной гидродинамической модели означает следующее: сколько жидкости в *единицу времени* поступило в пирамиду – столько из неё и вытекло.