«Утверждаю»
зав. кафедрой
С.А. Коробкова

Методические указания № 5

к проведению практического занятия
по дисциплине «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
направление подготовки «Биотехнические системы и технологии»
в 3-м семестре 2020-2021 уч. г.

Тема: ***«ТЕОРИЯ ПОЛЯ: ИТОГОВОЕ ЗАНЯТИЕ»***

(время проведения занятия 120 минут: 45+10+45+5+15)

Цель занятия: формировать понятия векторного поля, дивергенции и ротора векторного поля

ПОДГОТОВИТЬ ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕМЫ:

Содержание самостоятельной (домашней) работы:

I. Повторите основные вопросы темы

1. Скалярные поля и их характеристики: градиент и производная по направлению
2. Векторные поля и их характеристики:
   1) Поток и дивергенция. Теорема Остроградского - Гаусса
   2) Циркуляция и ротор. Теорема Стокса
   3) Простейшие векторные поля: потенциальное, соленоидальные, гармоническое
3. Дифференциальные операции первого и второго порядка

II. Решите типовой вариант контрольной работы (**в тетради для домашних работ**):

Задача 1. Для заданной функции $z = f(x, y)$ найти градиент (вектор и модуль) и производную этой функции в заданной точке $M(x_0, y_0)$ и направлении вектора $\vec{l}$, составляющего угол α с положительным направлением оси Ox:

$$z = x^2 + y^2 + 4x + 2y - 2, M(-1,2), \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Задача 2. **Даны векторное поле** $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ **и плоскость** $Ax + By + Cz + D = 0$ (p)**, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду** V**. Пусть** σ **– основание пирамиды, принадлежащее плоскости** (p)**;** λ **– контур, ограничивающий** σ**;** $\bar{n}$ **– нормаль к** σ**, направленная вне пирамиды** V**:** $\vec{a} = (2y - 4x)\bar{k}$ **,** $(p) x + 4y + z - 8 = 0$**. Сделать чертеж.**

Требуется вычислить:

1) **циркуляцию векторного поля** $\bar{a}$ **по замкнутому контуру** λ **(по определению и используя теорему Стокса)**

2) поток векторного поля $\bar{a}$ **через полную поверхность пирамиды** V

Задача 3. Определить характер векторного поля $\vec{a} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$: проверить, является ли векторное поле потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля $\bar{a}$ найти его потенциал $U(x, y, z)$:

Задача 4. Найти $rot(\vec{F} \cdot \vec{a})\vec{b}$, где $\vec{F} = -x\vec{i} + 2y\vec{j} + 4z\vec{k}, \vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

Содержание аудиторной работы:

- решать вариант контрольной работы

Литература:

1) Данко П.Е. и др. «Высшая математика в упражнениях и задачах» Ч.1 Гл.8, п.5, Ч.2. гл. II, §6.
2) Лекция

Метод. указания составлены Е.О. Плешаковой

ЗАМЕЧАНИЕ.

К задаче о вычислении потенциала. Потенциал находится по формуле:

$$u(P(x,y,z)) = \int_A^P (\bar{a}\cdot d\bar{r}) = \int_{AP} (\bar{a}\cdot d\bar{r}) = \int_{AP} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

где $A(x_0, y_0, z_0)$ **- фиксированная точка поля, координаты которой удовлетворяют условиям существования полей** $\bar{a}$ **и** $rot\bar{a}$ **. Как правило,** $A(0,0,0)$, **а** $P(x,y,z)$ **- текущая точка поля.**

Линейный интеграл вычисляется по любому контуру дуги AP **.**

Для вычисления рациональным является контур в виде ломаной, отрезки которой параллельны осям координат.

В этом случае получаем формулу:

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{.z_0}^{z} R(x,y,z)dz$$

Внимание! После вычисления интегралов в правой части добавляют константу *C*, происхождение которой не совсем понятно. Тем более, что в некоторых источниках константа не добавляется.