ТЕМА : «Элементы теории рядов: числовые положительные и знакочередующиеся ряды, исследование на сходимость. Степенные ряды: нахождение области сходимости. Практические приложения»

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ:

ВСПОМНИМ!

Ряды представляют собой ПРОСТОЙ И СОВЕРШЕННЫЙ ИНСТРУМЕНТ математического анализа для приближенного вычисления функций, интегралов и решений дифференциальных уравнений

Для того, чтобы найти ОБЛАСТЬ сходимости степенного ряда, необходимо

1) найти РАДИУС сходимости степенного ряда

2) найти ИНТЕРВАЛ сходимости степенного ряда

3) исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

Радиус сходимости можно найти по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $x_0 - R < x < x_0$, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

При $x_0 = 0$ получаем ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Разложение функции в ряд Тейлора (или Маклорена) позволяет приближённо ЗАМЕНИТЬ ФУНКЦИЮ СУММОЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ СТЕПЕННОГО РЯДА, т.е. многочленом

Вычисление значений функции при этом сводится к вычислению значений многочлена, что можно сделать, производя только простейшие арифметические действия

И, что особенно важно, можно оценить точность получаемых приближённых значений

Задача 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n(n+2)}$

РЕШЕНИЕ

Задан степенной ряд общего вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

Согласно условию $a = 2,\quad a_n = \frac{1}{3^n(n+2)},\quad u_n = \frac{(x-2)^n}{3^n(n+2)}$

1) радиус сходимости найдём по формуле $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

составим $a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}((n+1)+2)} = \frac{1}{3^n \cdot 3(n+3)}$

Находим $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n\cdot(n+2)}\cdot\frac{3^n\cdot 3\cdot(n+3)}{1} = 3$

2) Интервал сходимости находим согласно формуле

$$a - R < x < a + R$$

И получаем $2-3 < x < 2+3$

или $-1 < x < 5$

3) **Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости**
   a) $\boldsymbol{x = -1}$

Получаем знакочередующийся ряд с общим членом

$$u_n = \frac{(-1-2)^n}{3^n(n+2)} = \frac{(-3)^n}{3^n(n+2)} = \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n(n+2)} = \frac{(-1)^n}{(n+2)},$$

сходимость которого исследуем по признаку Лейбница

Проверим выполнение первого условия: $|u_n| > |u_{n+1}|$

по условию $|u_n| = \dfrac{3}{n+2}$

тогда $|u_{n+1}| = \dfrac{3}{n+3}$

Очевидно, что $|u_n| > |u_{n+1}|$ **, т.е. условие выполняется**

Проверим выполнение второго условия: $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$

Получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n+2} = 0$

Вывод: оба условия выполнены. Точка ***X = -1 принадлежит области сходимости ряда.***

   b) $\mathbf{x = 5}$

Получаем положительный ряд с общим членом $u_n = \dfrac{(5-2)^n}{3^n(n+2)} = \dfrac{(3)^n}{3^n(n+2)} = \dfrac{1}{(n+2)}$

Сходимость ряда можно исследовать с помощью достаточных признаков сравнения (первого или предельного) или интегрального Коши.

Воспользуемся интегральным признаком Коши – вычисли несобственный интеграл первого рода: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dn}{(n+2)}$

По определению $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dn}{(n+2)} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dn}{(n+2)}$

a) $\displaystyle\int_1^b \frac{dn}{(n+2)} = \ln(n+1)\Big|_1^b = \ln(b+1) - \ln 3 = \ln\frac{b+1}{3}$

b) $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\ln\frac{b+1}{3} = \infty$

Предел равен бесконечности, интеграл расходится, расходится и ряд.

Вывод: ***X = 5 не принадлежит области сходимости ряда***

Ответ:

1) **Радиус сходимости ряда** $\boldsymbol{R = 3}$
2) **Интервал сходимости ряда** $x \in (-1;+5)$
3) **Область сходимости ряда** $x \in [-1;+5)$

Задача 2. Вычислить $\sqrt[3]{500}$ с точностью до 0,0001

РЕШЕНИЕ

Для решения задачи будем использовать разложение в ряд функции $\boldsymbol{(1+t)^m}$**:**

$$(1+t)^{\mathrm{m}} = 1 + \frac{m}{1!}t + \frac{m(m-1)}{2!}\cdot t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}t^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(2n-1)!} + \ldots$$

Разложение имеет место, если $m \geq 0 \quad и \quad -1 \leq t \leq 1$
Выполним необходимые преобразования условия задачи:

$$\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{512 - 12} = \sqrt[3]{512\left(1 - \frac{12}{512}\right)} = 8 \times \sqrt[3]{1 - \frac{12}{512}}$$

Таким образом, можно использовать разложение в ряд функции $(1 + t)^m$**.**

Условия разложения выполнены: $m = \frac{1}{3} > 0 \quad и \quad t = -\frac{12}{512} \in [-1;+1]$

Подставим в формулу разложения $m = \frac{1}{3} \quad и \quad t = -\frac{12}{512}$

$$\sqrt[3]{500} = 8 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{12}{512}} = 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{12}{512}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{12}{512}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{12}{512}\right)^3 + \ldots\right)$$

Начиная со второго слагаемого, вычислим каждое из оставшихся отдельно:

2-е слагаемое

$\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{12}{512}\right) = -0{,}0078125$. Модуль второго слагаемого больше 0,0001. Поэтому ВТОРОЕ СЛАГАЕМОЕ ОСТАВЛЯЕМ

3-е слагаемое

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{12}{512}\right)^2 \approx -0{,}000061$. Модуль ТРЕТЬЕГО слагаемого меньше 0,0001. Начиная с этого слагаемого, все остальные члены ряда отбрасываем

Суммируем полученные промежуточные результаты <u>с учётом знака</u>

$$\sqrt[3]{500} = 8 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{12}{512}} = 8 \cdot (1 - 0{,}0078125) = 7{,}9375$$

Контроль: $7{,}9375^3 = 500{,}0935$

Задача 3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав ее почленно

РЕШЕНИЕ

Используем разложение функции

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad -\infty < t < +\infty$$

Очевидно, что $t \equiv x$

Представим подынтегральную функцию в виде ряда:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

В определённом интеграле заменим функцию её разложением в ряд и найдём первообразную:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+\ldots\right)dx = x\Big|_0^1 - \frac{1}{18}x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{600}x^5\Big|_0^1 - \frac{1}{35280}x^7\Big|_0^1 + \ldots$$

Вычисляем каждое слагаемое отдельно:

1) $x\Big|_0^1 = 1 > 0{,}001$
2) $-\frac{1}{18}x^3\Big|_0^1 = -\frac{1}{18} \approx -0{,}0555 \Rightarrow |-0{,}0555| > 0{,}001$
3) $\frac{1}{600}x^5\Big|_0^1 = \frac{1}{600} \approx 0{,}0017 > 0{,}001$
4) $-\frac{1}{35280}x^7\Big|_0^1 = -\frac{1}{35280} \approx -0{,}000028 \Rightarrow |-0{,}000028| < 0{,}001$

Нужная точность достигнута уже на третьей итерации – все остальные члены ряда отбрасываем

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1-0{,}0555+0{,}0017 = 0{,}9465 \approx 0{,}947$$

Задача 4. Найти $n = 4$, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y'' = xy$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 1; y'(0) = 0$

РЕШЕНИЕ

По условию $x_0 = 0$, поэтому общая формула Тейлора трансформируется в частный случай **разложения - разложения в ряд Маклорена:**

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \ldots$$

Найдём коэффициенты данного ряда:

1) **по условию** $y(0) = 1$
2) по условию $y'(0) = 0$, т.е. второй член разложения равен нулю!
3) найдём $y''(0)$

В заданное уравнение подставим $y'' = xy$ $x_0 = 0$ *и* $y(0) = 1$, получаем $y''(0) = 0 \cdot 1 = 0$, т.е. третий член разложения равен нулю!

4) **найдём** y''' *и* $y'''(0)$

$$y''' = (y'')' \Rightarrow y''' = (y'')' = (xy)' = y + xy'$$
$$y'''(0) = y(0) + x_0 \cdot y'(0) = 1 + 0 = 1$$

5) найдём $y^{(4)}$ *и* $y^{(4)}(0)$

$$y^{(4)} = (y''')' = (y + xy')' = y' + y' + xy'' = 2y' + xy''$$
$$y^{(4)}(0) = 0$$

И пятый член разложения равен нулю!

6) найдём $y^{(5)}$ *и* $y^{(5)}(0)$

$$y^{(5)} = \left(y^{(4)}\right)' = \left(2y' + xy''\right)' = 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy'''$$

$$y^{(5)}(0) = 0$$

И шестой член разложения равен нулю!

7) найдём $y^{(6)}$ *и* $y^{(6)}(0)$

$$y^{(6)} = \left(y^{(5)}\right)' = \left(3y'' + xy'''\right)' = 3y''' + y''' + xy^{(4)} = 4y''' + xy^{(4)}$$

$$y^{(6)}(0) = 4 \cdot 1 = 4$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Найдены только ТРИ, отличных от нуля члена разложения. Продолжим находить производные

8) найдём $y^{(7)}$ *и* $y^{(7)}(0)$

$$y^{(7)} = \left(y^{(7)}\right)' = \left(4y''' + xy^{(4)}\right)' = 4y^{(4)} + y^{(4)} + xy^{(5)} = 5y^{(4)} + xy^{(5)}$$

$$y^{(7)}(0) = 0$$

И восьмой член разложения равен нулю!

9) найдём $y^{(8)}$ *и* $y^{(8)}(0)$

$$y^{(8)} = \left(y^{(8)}\right)' = \left(5y^{(4)} + xy^{(5)}\right)' = 5y^{(5)} + y^{(5)} + xy^{(6)} = 6y^{(5)} + xy^{(6)}$$

$$y^{(8)}(0) = 0$$

И девятый член разложения равен нулю!

10) найдём $y^{(9)}$ *и* $y^{(9)}(0)$

$$y^{(9)} = \left(y^{(9)}\right)' = \left(6y^{(5)} + xy^{(6)}\right)' = 6y^{(6)} + y^{(6)} + xy^{(7)} = 7y^{(6)} + xy^{(7)}$$

$$y^{(8)}(0) = 7 \cdot 4 = 28$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Наконец-то, найдены все четыре, отличные от нуля члена разложения. Записываем частное решение заданного дифференциального уравнения

$$y(x) = y(0) + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \frac{y^{(9)}(0)}{9!}x^9 + \ldots$$

Подставим найденные производные.

$$y(x) = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4}{6!}x^6 + \frac{28}{9!}x^9 + \ldots$$