Введение в математический анализ. Множества. Операции с множествами. Декартово произведение множеств. Отображения множеств. Мощность множества. Множество вещественных чисел.

Лекция 1

Сегодня мы знаем, что, логически говоря,
можно вывести почти всю современную
математику из одного источника – теории множеств.
Н. Бурбаки

Тема: «Множества»

План

1. Множества: основные понятия.
2. Операции с множествами.
3. Декартово произведение множеств.
4. Отображения множеств.
5. Мощность множества.
6. Множество вещественных чисел.

Введение

Теоретико-множественные представления – это описание исследуемой системы, процессов средствами теории множеств, т.е. как множества взаимосвязанных и/или взаимодействующих частей – элементов.

Связи между элементами *задаются* через *отношения и/или соответствия.*

1. Основные понятия. Классификация. Способы задания.

Понятия «элемента» и «множества» в теории множеств являются первичными.

Все остальные объекты теории будут определяться через них (с их помощью).

Определить элементы и множества нельзя, но можно дать пояснение:

под множеством понимается произвольная совокупность элементов, которая мыслится как единое целое.

Примеры:

– *множество* десятичных цифр, *элементами* которого являются цифры (числа) 0, 1, …. 9;

– *множество* натуральных чисел, элементами которого являются…

– *множество* студентов первого курса ВолГМУ факультета клинической психологии и социальной работы, *элементами* которого являются …

Множество – первичное понятие математики, т.е. это понятие не определяется через другие, а только поясняется О множестве известно как минимум, что оно состоит из элементов

Под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью (таково интуитивное определение множества, данное основателем теории множеств Георгом Кантором).

Создатель теории множеств Георг Кантор (1845–1918 гг.) определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью» или «множество есть многое, мыслимое нами как единое»

Объекты, составляющие множества, называются его элементами.

Множества будем обозначать прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C,.., X, Y, Z$.

Элементы множеств – строчными буквами $a, b, c,.., x, y, z$.

Основное соотношение между элементом a и содержащим его множеством A, обозначается так:

$a \in A$ (элемент a принадлежит множеству A) или $a \notin A$ (элемент a не принадлежит множеству A).

Некоторые множества имеют общепринятые обозначения:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел

Q– множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел;

Множество A называется *подмножеством* множества B ($A \subseteq B$), если всякий элемент из A является элементом B.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется *строгим (собственным)* подмножеством и обозначается $A \subset B$.

Определения *равенства множеств*:

1. Множества A и B равны $A = B$, если их элементы совпадают.
2. Множества A и B равны $A = B$, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Таким образом, чтобы доказать равенства множеств, требуется установить два включения.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется *конечным*, в противном случае – *бесконечным*.

Например, множество десятичных цифр – конечно, а множество натуральных чисел – бесконечно.

Число элементов в конечном множестве M называется его *мощностью* и обозначается $|M|$.

Множество, мощность которого равна 0, т.е. не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* (обозначается $\varnothing$): $|\varnothing| = 0$.

Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Способы задания множеств

1) *Перечислением*, т.е. списком своих элементов. Списком можно задать лишь конечные множества.

Например,

– каждое слово – это множество, элементами которого являются буквы;

– множество натуральных чётных чисел $2N = \{2,4,6,...\}$;

– множество предметов, которые входят в учебный план специальности данного студента;

2) *Порождающей процедурой*, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры.

Например, множество всех целых чисел, являющихся степенями двойки M_{2^n}, $n \in N$, где N – множество натуральных чисел, может быть представлено порождающей процедурой, заданной двумя правилами, называемыми *рекурсивными,* или *индуктивными:*

а) $1 \in M_{2^n}$; б) если $m \in M_{2^n}$, то $2m \in M_{2^n}$.

3) *Описанием характеристических свойств,* которыми должны обладать его элементы.

Обозначается: $M = \{x | P(X)\}$ или $M = \{x : P(X)\}$, что надо понимать следующим образом:

Множество M состоит из элементов x таких, что x обладает свойством P.

Например.

Надёжным способом точно описать свойство элементов данного множества является задание *распознающей (разрешающей)* процедуры. Она должна устанавливать для любого объекта x, обладает он данным свойством P или нет.

Или *выделение.* В данном случае среди элементов какого-либо множества (основного) выделяются с помощью высказывания элементы, обладающие некоторым свойством.

Обозначается: $A = \{x \in T : \alpha(x)\}$: множество A состоит из элементов x некоторого основного множества T, которые обладают свойством α

Примеры задания множества в форме выделения и в форме перечисления:

– множество $2N = \{n \in N : n \quad \text{делится} \quad \text{на} \quad 2\} = \{2,4,6,8,...\}$;

– интервал $(-1;1) = \{x \in R : -1 < x < 1\} = \{x \in R : x^2 < 1\}$.

Счетные и несчетные множества

Множества A и B эквивалентны, если существует биекция A на B. Запись: $A \sim B$.

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (симметрия),

$A \sim A$ (рефлексивность),

$(A \sim B) \wedge (B \sim C) \Rightarrow A \sim C$ (транзитивность),

A конечно, если существует n, такое, что $A \sim \{1, 2, ..., n\}$

A счетное, если $A \sim \mathbf{N}$,

A несчетно, если A бесконечно, но не счетное.

Если $A \sim B$, то говорят, что A и B имеют одинаковую мощность.

Множество $\mathbf{Q}$ счетное, множество $\mathbf{R}$ несчетно.

Множество A называют множеством мощности континуума, если $A \sim \mathbf{R}$.

2. Операции над множествами. Диаграммы Венна

Рассмотрим способы образования новых множеств.

Каждое из множеств, которое используется для построения новых, является подмножеством некоторого универсального множества. При этом необходимо, чтобы вновь образованное множество было множеством того же самого универсального множества. *Вновь образованное множество задается путём перечисления или описанием характеристических свойств.*

Логические операции	Операции над множествами
отрицание	дополнение
конъюнкция	пересечение
дизъюнкция	объединение
импликация	разность

Для наглядного представления алгебраических операций над множествами и их ***свойств(ами) (?)*** применяют диаграммы Венна или круги Эйлера, (а бинарные отношения иллюстрируются на матрицах и графах).

Диаграммы Венна (круги Эйлера, диаграммы Эйлера-Венна) – геометрические представления множеств. Построение диаграммы заключается в построении прямоугольника, представляющего собой универсальное множество U, а внутри него – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Расположение фигур должно соответствовать условию задачи, т.е. они могут пересекаться или не пересекаться. Фигуры должны быть определенным образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определённые области для обозначения вновь образованных множеств.

Поэтому основные понятия теории множеств можно представить в табличной или графической форме.

Операции:

- **Объединением множеств** A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B.
  $A \cup B = \{x : x \in A \quad или \quad x \in B\}$

Пример: если $A = \{0,1,2\}$, $B = \{-2,-1,0,1\}$, то $A \cup B = \{-2,-1,0,1,2\}$

- **Пересечением множеств** A и B (обозначается $A \cap B$) называется множество, которое состоит из всех тех и только из тех элементов, которые одновременно принадлежат множествам и A, и B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad и \quad x \in B\}$$

Если пересечения нет, то говорят, что имеет место пустое пересечение (непересекающееся множество).

Пример: если $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{-1,0,1,10\}$, то $A \cap B = \{0,1\}$

- **Разностью множеств** $A \setminus B$ называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \quad и \quad x \notin B\}$$

Разность – операция строго двухместная и некоммуникативная: в общем случае $A \setminus B \neq B \setminus A$

Пример: если $A = [-2;2]$, $B = (-1;1)$, то $A \setminus B = [-2;-1] \cup [1;2]$.

Пусть U – универсальное множество такое, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

- **Дополнением (до U)** множества A (обозначается $\overline{A}$) называется множество всех элементов, не принадлежащих A, но принадлежащих U: $\overline{A} = U \setminus A$.

Операции объединения, пересечения, дополнения $\{\cup, \cap, -\}$ часто называют булевыми операциями над множествами.

Законы алгебры множеств

Множество, его подмножества и законы сочетания подмножеств образуют алгебраическую систему, называемую булевой алгеброй.

Глоссарий (Материал из Википедии — свободной энциклопедии)

Ассоциативность (от лат. *associatio* — соединение)

1. **В математике** (также **сочетательность**) — свойство любой операции $\circ$, такое, что для неё выполняется равенство:

$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ для любых элементов x, y, z.

Например, для умножения: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

В программировании (также **очерёдность**) ассоциативностью операторов называют последовательность их выполнения (или направление вычисления), реализуемое, когда операторы имеют одинаковый приоритет и отсутствует явное (с помощью скобок) указание на очерёдность их выполнения. При этом различается *левая* ассоциативность, при которой вычисление выражения происходит слева-направо, и *правая* ассоциативность — справа-налево. Соответствующие операторы называют левоассоциативными и правоассоциативными.

Коммутативная операция — это бинарная операция $\circ$, обладающая **коммутативностью** (от позднелатинского слова *commutativus* — «меняющийся»), то есть *переместительностью*:

$x \circ y = y \circ x$ для любых элементов x, y.

В частности, если групповая операция является коммутативной, то группа называется абелевой. Если операция умножения в кольце является коммутативной, то кольцо называется коммутативным.

Термин «коммутативность» ввёл в 1814 году французский математик Франсуа Жозеф Сервуа (1767—1847).

Дистрибути́вность (от лат. *distributivus* — «распределительный») — свойство согласованности двух бинарных операций, определённых на одном и том же множестве.

Говорят, что две бинарные операции $+$ и $\times$ удовлетворяют свойству дистрибутивности, если для любых трех элементов x, y, z:

$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ — *дистрибутивность слева*;

$(y + z) \times x = y \times x + z \times x$ — *дистрибутивность справа*.

Если операция $\times$ является коммутативной, то свойства дистрибутивности слева и справа совпадают.

Транзитивность (от лат. transitivus — переходный), одно из свойств логического отношения величин. Отношение *a* * *b* называется транзитивным, если из *a* * *b* и *b* * *c* вытекает, что *a* * *c*. *Например*, отношение равенства (*a* = *b*) транзитивно, так как из *a* = *b* и *b* = *c* вытекает *a* = *c*. Аналогично, транзитивным является отношение <<*a* больше *b*>> (*a* > *b*). Отношение же <<*a* не равно *b*>> (*a* ¹ *b*) не транзитивно, так как из *a* ¹ *b* и *b* ¹ *c* ещё не вытекает *a* ¹ *c*. В геометрии транзитивным является отношение параллельности между двумя прямыми (если *a* параллельна *b*, а *b* параллельна *g*, то и *a* параллельна *g*), отношение же перпендикулярности прямых не транзитивно.

Идемпотентность (от лат. *idem* – тот же самый и *potens* – сильный, мощный; букв. – равносильность) – свойство нек-рых объектов, рассматриваемое в логике (и алгебре) и выражаемое в общем случае формулой $a \times a = a$.

1. *Законы для объединения и пресечения.*
1.1 коммутативности: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
1.2 ассоциативности: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
1.3 дистрибутивности:
○ пересечения относительно объединения: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

○ объединение относительно пересечения: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
идемпотентности: $A\cup A=A$; $A\cap A=A$
1.5 действия с универсальным и пустым множествами:
$A\cup\varnothing=A$ $A\cup U=U$
$A\cap\varnothing=\varnothing$ $A\cap U=A$
1.6 поглощения: $A\cap(A\cup B)=A$; $A\cup(A\cap B)=A$.

2. *Законы для дополнений*
2.1 двойного дополнения: $\overline{\overline{A}}=A$
2.2 действия с универсальным и пустым множествами:
$A\cup\overline{A}=U$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$; $\overline{U}=\varnothing$; $\overline{\varnothing}=U$
2.3 де Моргана
$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
$A\cap B=\overline{A}\cup\overline{B}$

3. *Законы для разностей множеств*		
3.1 $A\setminus B=A\cap\overline{B}$	3.2 $U\setminus A=\overline{A}$	3.3. $A\setminus U=\varnothing$
3.4 $A\setminus\varnothing=A$	3.5 $\varnothing\setminus A=\varnothing$	3.6 $A\setminus A=\varnothing$
3.7 $((A\setminus B)\setminus C)=A\setminus(B\cup C)$	3.8 $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$	
3.9 $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus(C\setminus A)$	3.10 $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$	

☝**Замечание**.

Симметрическая разность (дизъюнктивная сумма) $A\Delta B$ есть множество всех элементов, принадлежащих или к A, или к B, но не к обоим вместе:

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

Например, $\{1,2,3\}\Delta\{2,3,4\}=\{1,4\}$. Дизъюнктивная сумма получается объединением элементов множеств, за исключением тех, которые встречаются дважды.

3. Декартово (прямое) произведение множеств.

Определение. Пусть a,b,c,d – элементы каких-то множеств (не обязательно одного множества). Две пары элементов $(a;b)$ и $(c;d)$ будем называть равными и писать $(a;b)=(c;d)$, если $a=c$ и $b=d$.

Такие пары называют упорядоченными парами, т.е. пару элементов $(a;b)$ называют упорядоченной парой, если $(a;b)\neq(b;a)$ при $a\neq b$.

Определение. Декартовым (прямым) произведением множества A на множество B называют множество всех упорядоченных пар $(a;b)$, где первый элемент пары является элементом множества A, а второй – множества B и обозначается $A\times B$.

Иначе, $A\times B\overset{df}{=}\{(a;b)|a\in A, b\in B\}$. Здесь знак $\overset{df}{=}$ означает равенство по определению.

Пример. Пусть $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$– множество первых восьми букв латинского алфавита. $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$– множество первых восьми натуральных чисел. Тогда декартово произведение множества A на множество B есть множество $A\times B=\{(a;1),(a;2),..,(h;1),..,(h;8)\}$. Для удобства записи все элементы этого множества можно записывать проще: $a1,a2,..,a8,..,e4,..,h8$ и мы получаем обозначение всех 64 клеток шахматной доски.

Декартов квадрат множества.

Определение. Декартовым квадратом множества A называют декартово произведение множества A на множество A (т.е. само на себя).

Обозначение: $A^2 \overset{df}{=} A \times A \overset{df}{=} \{(x;y) | x, y \in A\}$.

Пример. Пусть R – множество действительных чисел. Тогда R^2 – множество всех упорядоченных пар действительных чисел. Это множество можно интерпретировать как множество точек на координатной плоскости с соответствующими координатами.

Прямое (декартово) произведение (важная неалгебраическая операция). Прямым произведением множеств X и Y (обозначение $X \times Y$) называется множество упорядоченных пар:

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$$

Пример.

1) если $X = \{[0,1]\}$, $Y = \{-1,0\}$, $X \times Y$ есть множество точек плоскости, принадлежащих квадрату…
2) если $X = \{(1,2)\}$, $Y = R$
3) $X = R_+ = \{x \in R : x \geq 0\}$, $Y = [-1,0] \cup (1,2)$
4) $R^2 = R^1 \times R^1$ – плоскость
5) $R^3 = R^1 \times R^1 \times R^1$ – пространство

Декартово (прямое) произведение множеств

$$A \times B = \{(x,\ y) |\ x \in A,\ y \in B\}$$

$$(A \times B = B \times A) \Leftrightarrow (A = B)$$

$A \times A = A^2$ - декартов квадрат множества A,

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\ раз} = A^n$$

4. Отображения множеств.

Отображение есть одно из основных понятий математики.

Отображение есть какое-либо правило или закон соответствия множеств.

Пусть X и Y - произвольные множества.

Определение. Если каждому элементу $x \in X$ по какому-то правилу f поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества X во множество Y .

☝**Замечание.**
В случае, когда множества X и Y нечисловые, **отображение** называется *оператором,*
отображение нечислового множества X в числовое множество Y называется *функционалом,*
отображение числового множества X в числовое множество Y называется *функцией.*

Примеры.

1) если каждому слову русского языка поставить в соответствие его первую букву, то получим отображение множества слов в множество букв русского алфавита (или словарь русского языка?)

Для обозначения отображения f множества X в множество Y используется запись:

$$f : X \to Y,$$

$$X \xrightarrow{f} Y,$$

$$f : x \to y(x \in X, y \in Y),$$

$$x \xrightarrow{f} y(x \in X, y \in Y)$$

Здесь, f – имя (наименование) отображения.

Если $x \in X$ – элемент множества X , то элемент множества Y , который ставится ему в соответствие при этом отображении, обозначают $f(x)$ и пишут $x \in X \mapsto f(x) \in Y$.

Элемент $f(x)$ называют значением отображения f "в точке x" или образом элемента x .

При этом сам элемент x называют прообразом элемента $f(x)$.

☝**Замечание.**

Областью определения отображения называется множество X . Обозначение: $Domf = D(f)$

Областью значений отображения называется множество Y . Обозначение: $\operatorname{Im} f \in Y$

Примеры отображений:

1) Рассмотрим множество всех треугольников на плоскости. Т – множество площадей всех этих треугольников, R+ - множество всех положительных рациональных чисел. Правило $f : T \to R$, согласно которому площадь каждого из треугольников на плоскости может быть выражена положительным рациональным числом, является отображением.

2) Для любого непустого множества X можно определить следующее правило $f : X \to X$, согласно которому $f(x) = x$. Такое правило будет являться отображением, называемым так же тождественным.

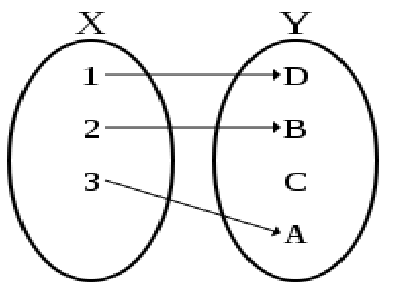
Задание отображений.

Для того, чтобы определить (задать) отображение множества X в множество Y , нужно задать сами множества X и Y , а затем задать правило с помощью которого мы сможем для каждого $x \in X$ находить соответствующий ему элемент $f(x) \in Y$. Это правило можно задать простой таблицей, если множество X конечное и имеет небольшое число элементов. Это правило можно задать с помощью формулы (математического выражения). Это правило можно задать с помощью некоторого алгоритма (процедуры). Все зависит от конкретной ситуации.

Инъекция (математика)

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

У этого термина существуют и другие значения, см. Инъекция (значения).



Инъективная функция.

Отображение $f : X \to Y$ называется **инъекцией** (или **вложением**, или отображением «**в**»), если разные элементы множества X переводятся в разные элементы множества Y.

Формально это значит, что если два образа совпадают, то совпадают и прообразы

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Инъективность является необходимым условием биективности (достаточно вместе с сюръективностью).

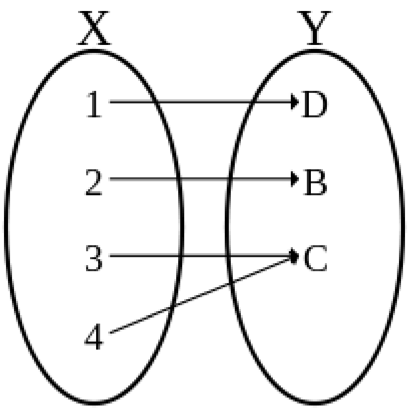
Инъекцию можно также определить как отображение, для которого существует левое обратное, то есть $f : X \to Y$ инъективно, если существует $g : Y \to X$ такое, что $g \circ f = id_X$.

Примеры

1. $f : R_{>0} \to R, f(x) = \ln x$ — инъективно.
2. $f : R_+ \to R_+, f(x) = x^2$ — инъективно.
3. $f : R \to R_+, f(x) = x^2$ — не является инъективным, т.к. $f(-2) = f(2) = 4$

Сюръекция

Материал из Википедии — свободной энциклопедии



Сюръективная функция.

Отображение $f : X \to Y$ называется **сюръективным** (или **сюръекцией**, или **отображением на** *Y*), если каждый элемент множества *Y* является образом хотя бы одного элемента множества *X*, то есть $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$.

Для случая числовых функций это выражается как «функция, принимающая все возможные значения».

Эквивалентные определения

Следующие свойства отображения $f : X \to Y$ эквивалентны:

f сюръективно, если

1. каждый элемент множества *Y* имеет хотя бы один прообраз во множестве *X* при отображении f.
2. образ множества *X* при отображении $f(x)$ совпадает с *Y*
3. f имеет *правое обратное отображение*, то есть такое отображение $g : X \to Y$, что $f(g(y)) = y$ для любого $y \in Y$.

Примеры

1. $f : R \to [-1;1], f(x) = \sin x$ — сюръективно. $f : R \to [-1;1], f(x) = \sin x$
2. $f : R \to R_+, f(x) = x^2$ — сюръективно.
3. $f : R \to R, f(x) = x^2$ — не является сюръективным. Например, не существует такого $x \in R$, что $f(x) = -9$.

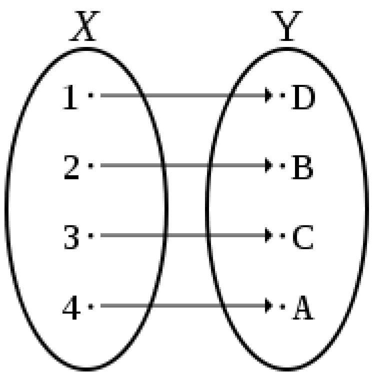
В информатике

Организация связи «многие к одному» между таблицами реляционной БД на основе первичных ключей

Биекция

[править]

Материал из Википедии — свободной энциклопедии



Биективная функция.

Биекция — это отображение, которое является одновременно и сюръективным и инъективным. При биективном отображении каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества, при этом, определено обратное отображение, которое обладает тем же свойством. Поэтому биективное отображение называют ещё **взаимно-однозначным отображением** (соответствием), **одно-однозначным отображением**.
Если между двумя множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие (биекция), то такие множества называются **равномощными**. С точки зрения теории множеств, равномощные множества неразличимы.
Взаимно-однозначное отображение конечного множества в себя называется перестановкой (элементов этого множества).

Определение

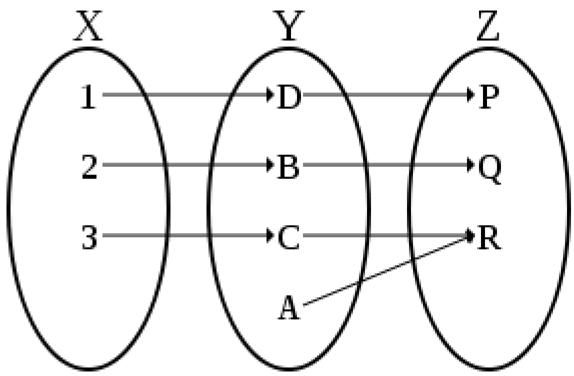
Функция $f: X \to Y$ называется **биекцией** (и обозначается $f: X \leftrightarrow Y$), если она:

1. Переводит разные элементы множества X в разные элементы множества Y (инъективность). Иными словами,
   - $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X \ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.
2. Любой элемент из Y имеет свой прообраз (сюръективность). Иными словами,
   - $\forall y \in Y, \exists x \in X \ f(x) = y$.

Примеры

- Тождественное отображение $\mathrm{id}: X \to X$ на множестве X биективно.
- $f(x) = x, \ f(x) = x^3$ — биективные функции из $\mathbb{R}$ в себя. Вообще, любой моном одной переменной нечетной степени является биекцией из $\mathbb{R}$ в себя.
- $f(x) = e^x$ — биективная функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.
- $f(x) = \sin x$ не является биективной функцией, если считать её определённой на всём $\mathbb{R}$.

Свойства



Композиция инъекции и сюръекции, дающая биекцию.

- Функция $f: X \to Y$ является биективной тогда и только тогда, когда существует обратная функция $f^{-1}: Y \to X$ такая, что
  $\forall x \in X \ f^{-1}(f(x)) = x$ и $\forall y \in Y \ f(f^{-1}(y)) = y$.
- Если функции f и g биективны, то и композиция функций $g \circ f$ биективна, в этом случае $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Коротко: **композиция биекций является биекцией.** Обратное, однако, неверно: если $g \circ f$ биективна, то мы можем утверждать лишь, что f инъективна, а g сюръективна.

В информатике

Организация связи «один к одному» между таблицами реляционной БД на основе первичных ключей.

X (или $D(f)$) - множество задания (область определения) отображения f.
Множество значений (образ множества X) отображения f:

$$\{y | y \in Y,\ y = f(x),\ x \in X\}.$$

Обозначения: $f(X)$, $E(f)$.

Простейшая классификация отображений

Отображение $f: X \to Y$:

1) инъективно (инъекция) (с лат. *injection* **вбрасывание**), если

$$\forall x_1,\ x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2);$$

2) сюръективно (сюръекция, отображение X на Y), если

$$f(x) = Y;$$

3) биективно (биекция, взаимно однозначное отображение), если оно инъективно и сюръективно.

Обратное отображение

$f^{-1}: Y \to X$ - определяемое для биекции $f: X \to Y$ следующим образом: если $f(x) = y$, то $f^{-1}(y) = x$.

$$f^{-1}(f(x)) = x \ \forall\ x \in X,\ f(f^{-1}(y)) = y \ \forall\ y \in Y$$

Композиция отображений

Если $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$, то их композицией (произведением) называют отображение $g \circ f: X \to Z$, определяемое формулой $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in X$.

$$g \circ f \neq f \circ g,\ h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g.$$

5. Мощность множества (Нахождение мощности объединения множеств)

Пусть X и Y - два произвольных множества. Можем ли мы сравнить множества по числу элементов? Разумеется, речь идёт о сравнении *конечных* множеств.

Задача сравнения конечных множеств по числу элементов может быть решена двумя способами.

1. Пересчитаем число элементов в каждом из множеств и сравним результаты.
2. Каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие один и только один элемент $y \in Y$.

Если при этом оказывается, что каждый элемент $y \in Y$ ставится в соответствие один и только один элемент $x \in X$, то говорят, что между элементами множеств X и Y установлено взаимнооднозначное соответствие. Очевидно, что для конечных множеств взаимнооднозначное соответствие можно установить только тогда, когда число элементов в этих множествах одинаково.

Взаимнооднозначное соответствие двух множеств – это частный случай отображения (функции) одного множества на другое, при котором разным элементам первого множества отвечают разные элементы второго.

Если между множествами X и Y установлено взаимнооднозначное соответствие, то говорят, что эти множества *эквивалентны* или *равномощны*, и записывают $X \sim Y$.

Если два конечных множества эквивалентны, то они равночисленны.

Понятие эквивалентности множеств есть обобщение понятия равночисленности на случай бесконечных множеств.

Пример попарно эквивалентных множеств.

Пусть множество $X = \{1,2,3,..., n\}$, т.е. множество натуральных чисел, а $Y = \{-1,-2,...,-n\}$, т.е. множество целых отрицательных чисел. Тогда $X \sim Y$, т.к. между ними устанавливается взаимнооднозначное соответствие.

Отношение эквивалентности множеств рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому совокупность всех множеств распадается на классы эквивалентных множеств.

Пусть в множестве X имеется собственное подмножество, равное Y, но в Y нет собственного подмножества, равномощного X. Тогда говорят, что мощность X больше мощности Y.

Например:

1. Множество N всех натуральных чисел имеет большую мощность, чем множество $Y = \{1,2,3\}$.
2. Пусть $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{9,13,5\}$.

Рассмотрим собственное подмножество $X_1 = \{1,2,3\}$ множества X. Оно равномощно множеству Y. Ни одно из собственных подмножеств множества Y не может быть равномощно всему множеству X. Следовательно, мощность множества X больше, чем мощность множества Y.

Для конечного множества его мощность есть число элементов этого множества.

Мощность любого бесконечного множества больше мощности любого конечного.

Примеры.

Среди бесконечных множеств наименьшей мощностью обладает множество N всех натуральных чисел и все мощности ему равномощные, т.н. счётные множества.

Мощность множества R всех действительных чисел, т.н. мощность континуума, больше, чем мощность счётного множества.

Число элементов в конечно множестве M называется его *мощностью* и обозначается $|M|$.

Множество, мощность которого равна 0, т.е. не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* (обозначается $\varnothing$): $|\varnothing| = 0$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

1. Мощность объединения двух множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

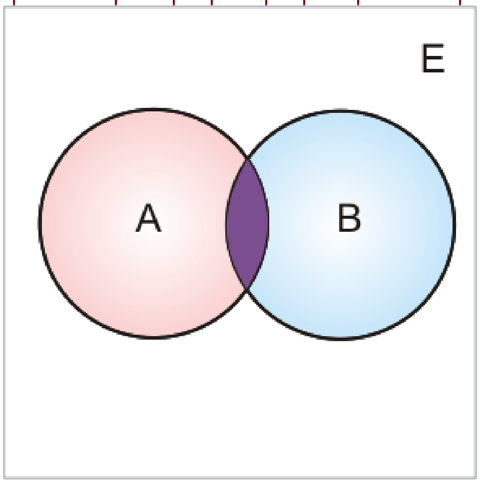
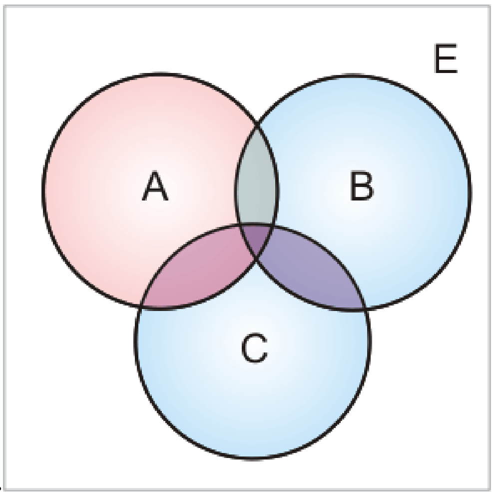


Рис. 2.4.

2. Мощность объединения трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



.

Рис. 2.5.

Доказательство:

$$|A \cup B \cup C = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| =$$
$$|A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| =$$
$$|A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

3. Мощность объединения n множеств:

Теорема. $A_1, A_2, ...A_n$ - некоторые множества, тогда мощность объединения n множеств определяется по формуле

$$|A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = |A_1| + |A_2| + ...+$$
$$+|A_n| - [|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + ... + |A_{n-1} \cap A_n|] +$$
$$[|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + ... + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|] - ...$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap ....A_n|.$$

Правая часть этой формулы является суммой n слагаемых, k -е по порядку слагаемое имеет вид $(-1)^{k-1}S_k(A_1, ..., A_n)$, где $S_k(A_1, A_2, ..., A_n)$ есть сумма чисел мощностей $|A_i1 \cap .... \cap A_lk|$ по всем возможным пересечениям k разных множеств из множеств $A_1, ..., A_n$.

__Пример.__ На потоке из 100 студентов 28 человек изучают английский язык, 30 человек - немецкий язык, 42 человека - французский язык. Причем 8 человек изучают два языка - английский и немецкий, 10 человек изучает английский и французский языки, 5 человек - немецкий и французский языки. 3 человека изучают все 3 языка.

__1)__ Сколько студентов не изучает ни один из перечисленных языков?
__2)__ Сколько студентов изучает один французский язык?
__3)__ Сколько студентов изучает немецкий язык в том и только том случае, если они изучают французский язык?

Решение

1) Пусть S - множество студентов, $|S| = 100$(студентов).

A- множество студентов, изучающих английский язык, $|A| = 28$;

H- множество студентов, изучающих немецкий язык $|H| = 30$,

Φ- множество студентов, изучающих французский язык, $|\Phi| = 42$.

Соответственно множества студентов, изучающих по 2 или 3 иностранных языка заданы следующим образом $|A \cap H| = 8, |A \cap \Phi| = 10, |H \cap \Phi| = 5, |A \cap H \cap \Phi| = 3$.

Y- множество студентов, изучающих иностранные языки.

Тогда по правилу мощности трёх множеств:

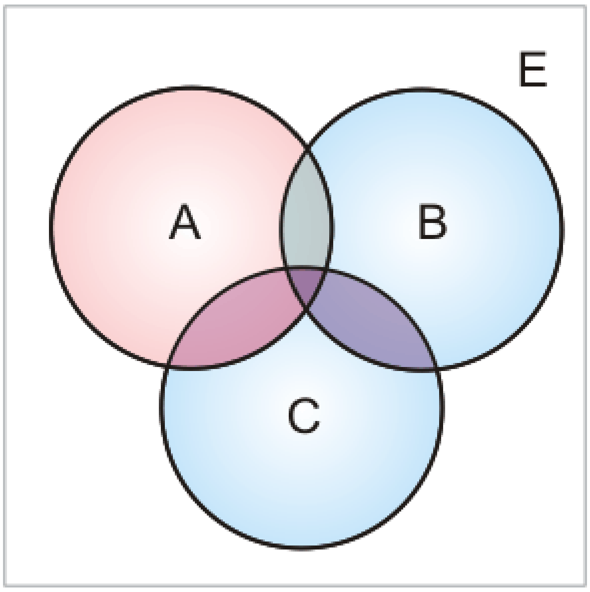
$|Y| = |A| + |H| + |\Phi| - |A \cap H| - |A \cap \Phi| - |H \cap \Phi| + |A \cap H \cap \Phi| =$
$28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80$

X - множество студентов, не изучающих иностранный язык.

$|X| = 100 - 80 = 20.$

2) Z - множество студентов, изучающих один французский язык

$$|Z| = |\Phi| - |A \cap \Phi| - |\Phi \cap H| + |A \cap H \cap \Phi| = 42 - 10 - 5 + 3 = 30$$



> ☝Замечание.
> Доказательство каждого закона основано на определении равенства множеств и определении операций над множествами.
> Доказательство законов можно выполнить графически или посредством последовательности утверждений типа "если P, то Q", которое записывается как $"P => Q"$.
> Множество A равно множеству B, если они состоят из одних и тех же элементов или оба пусты.
> Порядок выполнения операций: **дополнение**, пересечение, объединение.

1. **Множество вещественных чисел.**

Множество $Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..\}$ называется множеством целых чисел.

Если мы возьмём все числа вида $\pm\frac{m}{n}$, где m и n - натуральные числа, и добавим 0, то получим **множество рациональных чисел** Q**.**

Любое рациональное число можно представить *периодической* десятичной дробью.

Например, $\frac{1}{3} = 0{,}33333...$

В математике рассматривают также и *иррациональные* числа, которые представляют собой бесконечные *непериодические* десятичные дроби.

Таким иррациональным числом является число $\pi = 3{,}141592654..$

Объединение рациональных и иррациональных чисел образует множество вещественных чисел R**.**

Вещественные числа удобно изображать точками на прямой линии. Для этого на прямой линии выбирают *начало*-точка отсчёта 0, *направление* (обычно слева направо и обозначается стрелкой), а также единичный отрезок e. Число a будет обозначаться точкой на прямой, отстоящей от 0 на расстоянии $|a|$.

Здесь $|a|$ - абсолютная величина (модуль) числа a, определяемая равенством:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Точка выбирается справа от 0, если число a - положительное число, и слева, если a -отрицательное число.

Такая линия называется *числовой осью*.

Из истории математики.

Круги́ Эйлера - геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления. Изобретены Леонардом Эйлером. Используется в математике, логике, менеджменте и других прикладных направлениях.

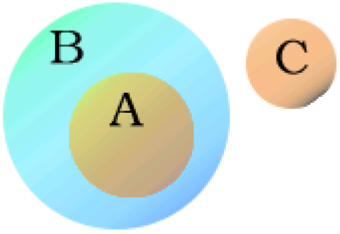
Важный частный случай кругов Эйлера — *диаграммы Эйлера — Венна*, изображающие все 2^n комбинаций n свойств, то есть конечную булеву алгебру.

При $n = 3$ диаграмма Эйлера - Венна обычно изображается в виде трёх кругов с центрами в вершинах равностороннего треугольника и одинаковым радиусом, приблизительно равным длине стороны треугольника.

При решении целого ряда задач Леонард Эйлер использовал идею изображения множеств с помощью кругов. Однако, этим методом ещё до Эйлера пользовался выдающийся немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716). Лейбниц использовал их для геометрической интерпретации логических связей между понятиями, но при этом всё же предпочитал использовать линейные схемы.

Но достаточно основательно развил этот метод сам Л. Эйлер. Методом кругов Эйлера пользовался и немецкий математик Эрнст Шрёдер (1841—1902) в книге «Алгебра логики».

Особенного расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1843—1923), подробно изложившего их в книге «Символическая логика», изданной в Лондоне в 1881 году. Поэтому такие схемы иногда называют *Диаграммы Эйлера — Венна*.



«Круги…» — это условный термин, вместо кругов могут быть любые многомерные фигуры, иерархически расположенные в пространстве, то есть одни фигуры поглощают либо часть других фигур, либо полностью

Диаграммы Венна (*Venn diagrams*) — общее название целого ряда методов визуализации и способов графической иллюстрации, широко используемых в различных областях науки и математики: теория множеств, теория вероятностей, эвентология, логика, статистика, компьютерные науки, «формальные нейронные сети» и др.; введены Джоном Венном, британским философом, математиком и логиком в 1881; показывают математические, теоретико-множественные или логические отношения между множествами или событиями; собственно *«диаграмма Венна»* показывает все возможные отношения между множествами или событиями из некоторого семейства; разновидностями *диаграмм Венна* служат: диаграммы Эйлера, диаграммы Джонстона, карты Карно, диаграммы Перси, «зубчатые колеса» Эдварда.

Диаграммы Венна

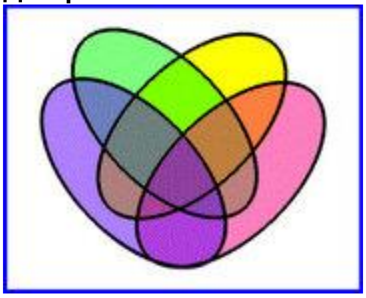


Диаграмма Венна четырёх множеств.

Собственно *«диаграмма Венна»* показывает все возможные отношения между множествами или событиями из некоторого семейства. Обычная диаграмма Венна имеет три множества. Сам Венн пытался найти *изящный способ с симметричными фигурами*, представляющий на диаграмме большее число множеств, но он смог это сделать только для четырех множеств (см. рисунок справа), используя эллипсы.

Диаграмма Венна, иллюстрирующая представления Канта о формах государства.

Диаграммы Эйлера

Диаграммы Эйлера аналогичны диаграммам Венна, но не обязательно иллюстрируют все возможные отношения между множествами или событиями.

Диаграммы Джонстона

Диаграммы Джонстона используются для иллюстрации высказываний пропозициональной логики, таких как «*Ни А или В истинно*» и служат способом визуализаций таблиц истинности. Внешне они идентичны диаграммам Венна, но не представляют множеств.

Карты Карно

Карты Карно, или *диаграммы Вейча (Veitch)*, — ещё один способ визуализации выражений булевой алгебры.

Диаграммы Перси

Диаграммы, предложенные Чарльзом Перси (Charles Peirce), — расширение диаграмм Венна, которое включает дополнительную логическую информацию, а также информацию о вероятностях и отношениях.

«Зубчатые колеса» Эдвардса

А.В.Ф.Эдвардс (A.W.F.Edwards) дал красивую конструкцию для большого числа множеств, используя центральную симметрию и изображая множества в виде «зубчатых колес».

В эвентологии

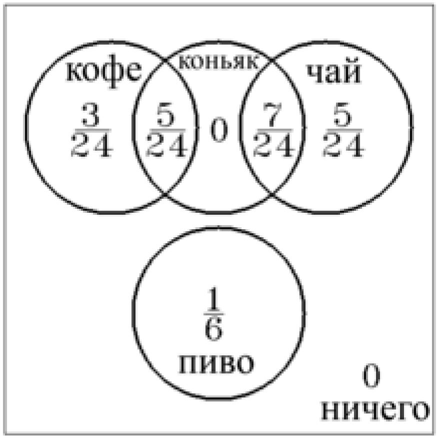


Диаграмма Венна, иллюстрирующая эвентологическое распределение стечения событий на рынке четырёх напитков.

Диаграммы Венна, широко используемые в эвентологии для визуализации эвентологических распределений множеств событий, содержат дополнительную информацию о возможных стечениях событий и их вероятностях.