Лекция 2

Математика - это наука, брошенная человечеством
на исследование мира в его возможных вариантах
Иммануил Кант

Тема: «Функция»
План
1. Отображения множеств
2. Функция. Основные понятия
3. Основные элементарные функции:
   3.1 свойства функций
   3.2 графики функций

1. Отображения множеств.

Отображение есть одно из основных понятий математики.
Отображение есть какое-либо правило или закон соответствия множеств.
Пусть X и Y - произвольные множества.
Определение. Если каждому элементу $x \in X$ по какому-то правилу f поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества X во множество Y.

☝**Замечание.**
В случае, когда множества X и Y нечисловые, **отображение** называется *оператором,*
отображение нечислового множества X в числовое множество Y называется *функционалом,*
отображение числового множества X в числовое множество Y называется *функцией.*

Примеры.

1) если каждому слову русского языка поставить в соответствие его первую букву, то получим отображение множества слов в множество букв русского алфавита (или словарь русского языка?)

Для обозначения отображения f множества X в множество Y используется запись:

$$f : X \to Y,$$

$$X \xrightarrow{f} Y,$$

$$f : x \to y(x \in X, y \in Y),$$

$$x \xrightarrow{f} y(x \in X, y \in Y)$$

Здесь, f – имя (наименование) отображения.

Примеры отображений:

1) Рассмотрим множество всех треугольников на плоскости. T – множество площадей всех этих треугольников, R+ - множество всех положительных рациональных чисел. Правило $f : T \to R$, согласно которому площадь каждого из треугольников на плоскости может быть выражена положительным рациональным числом, является отображением.
2) Для любого непустого множества X можно определить следующее правило $f : X \to X$, согласно которому $f(x) = x$. Такое правило будет являться отображением, называемым так же тождественным.

Задание отображений.

Для того, чтобы определить (задать) отображение множества X в множество Y, нужно задать сами множества X и Y, а затем задать правило с помощью которого мы сможем для каждого $x \in X$ находить соответствующий ему элемент $f(x) \in Y$. Это правило можно задать простой таблицей, если множество X конечное и имеет небольшое число элементов. Это правило можно задать с помощью формулы (математического выражения). Это правило можно задать с помощью некоторого алгоритма (процедуры). Все зависит от конкретной ситуации.

2. Понятие функции

История

Термин «функция» (в некотором более узком смысле) был впервые использован Лейбницем (1692 год). В свою очередь, Иоганн Бернулли в письме к тому же Лейбницу употребил этот термин в смысле, более близком к современному.
Впоследствии появилось определение функции, данное Эйлером (1751 год), затем — у Лакруа (1806 год) — уже практически в современном виде.
Общее определение функции (в современной форме, но для числовых функций) было дано Лобачевским (1834 год) и Дирихле (1837 год)
К концу XIX века понятие функции переросло рамки числовых систем.
Первыми это сделали векторные функции, вскоре Фреге ввёл логические функции (1879), а после появления теории множеств Дедекинд (1887) и Пеано (1911) сформулировали современное универсальное определение.

Функция (**отображение**, **оператор**, **преобразование**) — математическое понятие, отражающее связь между элементами множеств. Можно сказать, что функция — это «закон», по которому каждому элементу одного множества (называемому ***областью определения***) ставится в соответствие некоторый элемент другого множества (называемого ***областью значений***).

Интуитивное описание

Функция f (**отображение**, **операция**, **оператор**) — это *закон* или *правило*, согласно которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие единственный элемент y из множества Y.
При этом говорят, что функция f *задана* на множестве X, или что f *отображает* X в Y
Если элементу $x \in X$ сопоставлен элемент $y \in Y$, то говорят, что элемент y находится в ***функциональной зависимости*** f от элемента x.
При этом переменная x называется ***аргументом*** функции f или ***независимой переменной***, множество X называется ***областью задания*** или ***областью определения*** функции, а элемент y, соответствующий конкретному элементу x — ***частным значением*** функции f в точке x.
Множество Y всех возможных частных значений функции f называется её ***областью значений*** или ***областью изменения***.

Теоретико-множественное определение

В теоретической математике функцию f удобно определить как бинарное отношение (то есть множество упорядоченных пар $(x, y) \in X \times Y$), которое удовлетворяет следующему условию: для любого $x \in X$существует единственный элемент $y \in Y$ такой, что $(x, y) \in f$.

Это и позволяет говорить о том, что элементу $x \in X$сопоставлен **один и только один** элемент $y \in Y$такой, что $(x, y) \in f$.

Таким образом, **функция** — это *упорядоченная тройка* (или кортеж) объектов (f, X, Y), где

- множество Xназывается **областью определения**;
- множество Yназывается **областью значений**;
- множество упорядоченных пар $f \subseteq X \times Y$или, график функции.

Обозначения

Наличие функциональной зависимости между элементом $x \in X$и элементом $y \in Y$

- наиболее часто обозначается как
  $y = f(x)$,
  $f : x \mapsto y$ или $x \mapsto y$;
- реже используется обозначение без скобок $y = fx$, $y = f \circ x$или $y = xf$,
- а там, где необходимо подчеркнуть двойственность, используются обозначения со скобками: $y = (f, x)$или $y = (x, f)$;
- так же существует и операторное обозначение $y = x^f$, которое можно встретить в общей алгебре.
- $\lambda x.y$в лямбда-исчислении Чёрча.

Функции нескольких аргументов

Определение функции легко обобщить на случай функции многих аргументов.
Если множество Xпредставляет собой декартово произведение множеств $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$, тогда отображение $f\colon X \to Y$оказывается n-местным отображением, при этом элементы упорядоченного набора $x = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\}$ называются аргументами (данной n-местной функции), каждый из которых пробегает своё множество:
$x_i \in X_i$где $i = \overline{1, n}$.
В этом случае $y = f(x)$означает, что $y = f\{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\}$.

1. **Способы задания функции**

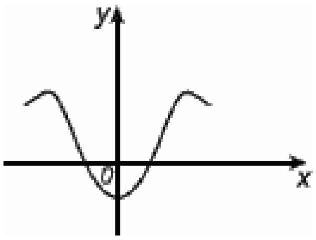
- **Аналитический способ.** Для задания функции пользуются выражением: $y = f(x)$. При этом, xесть переменная, пробегающая область определения функции, а y — область значений.

- **Графический способ**
- **Табличный**
- **Алгоритмический (описательный)**

3.Свойства элементарных функций

1.Четность и нечетность

Определение. Функция называется ***четной***, если для всех значений переменной *x*, принадлежащих области определения функции, значение *(-x)* тоже принадлежит области определения функции и выполнено равенство *f (-x) = f (x).*



Определение. Функция называется ***нечетной***, если для всех значений переменной *x*, принадлежащих области определения функции, значение *(-x)* тоже принадлежит области определения функции и выполнено равенство $f(-x) = -f(x)$.

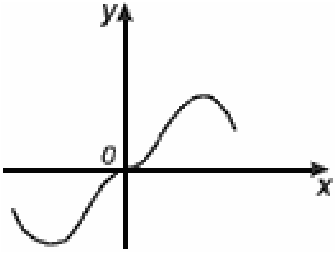
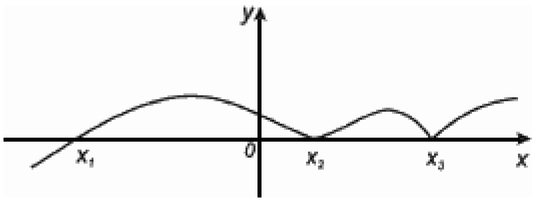


График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции центрально симметричен относительно начала координат.
Функцию, не являющуюся четной или нечетной, **называют функцией общего вида.**

Например, функции $y=|x|$, $y=x^{2n}$, $y=\cos x$ – четные; функции $y=x^{2n+1}$, $y=\sin x$, $y=tgx$ – нечетные; функции $y=x+1$, $y=a^x$, $y=\log_a x$ – ни четные, ни нечетные.

2. Нули функции

Нули функции – это абсциссы точек пересечения графика с осью O_x (y=0).



x_1, x_2, x_3 – нули функции y = f(x).

3. Промежутки знакопостоянства – это промежутки на которых функция либо только положительна, либо только отрицательна.

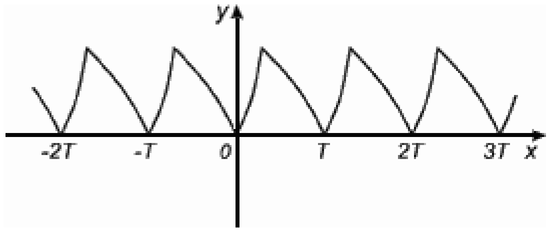
В промежутке, на котором функция положительна, график ее расположен над осью O_x; а на котором функция отрицательна – под осью O_x.

Для нахождения промежутков знакопостоянства функции $y=f(x)$ необходимо решить неравенства $f(x)>0$ и $f(x)<0$.

4. Периодичность

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической,*** если существует такое число $T > 0$, что для всех x из области определения $x+T$ и $x-T$ также принадлежат области допустимых значений и $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$. Число T называется ***периодом функции.***

График периодической функции состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов.

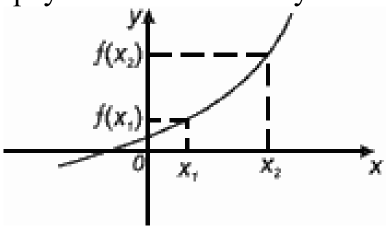


Периодическими являются все известные тригонометрические функции.

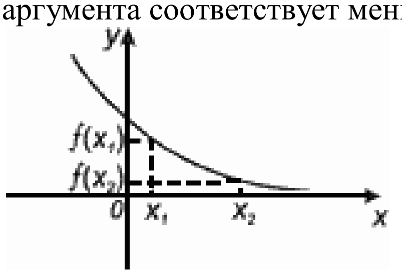
5. Монотонность (возрастание, убывание)

Определение. Функцию, возрастающую или убывающую на всей области определения, называют ***монотонной*** в области определения.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на некотором промежутке, если для любых значений x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции.



Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на некотором промежутке, если для любых значений x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.



Интервалы, на которых функция только возрастает или только убывает, называют интервалами монотонности функции, а саму функцию называют монотонной на этих интервалах.

Анализ функции $y = f(x)$ на строгую монотонность можно осуществлять с помощью производной, т.е. если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на отрезке $x \in [a,b]$, то функция $y = f(x)$ является строго возрастающей (убывающей) для $a \le x \le b$.

И другие свойства???

3. Основные элементарные функции и их графики. Преобразование графиков.

Основные преобразования графика функции

1. Вертикальный сдвиг $f(x) \to f(x)+b$
2. Горизонтальный сдвиг $f(x) \to f(x+a)$
3. Комбинированный сдвиг $f(x) \to f(x+a)+b$
4. Отражение:

а) функции $(f(x) \to -f(x))$, б) аргумента $(f(x) \to f(-x))$

5. Растяжение $(k>1)$ / Сжатие $(0<k>1)$

а) функции $(f(x) \to kf(x))$, б) аргумента $(f(x) \to f(kx))$

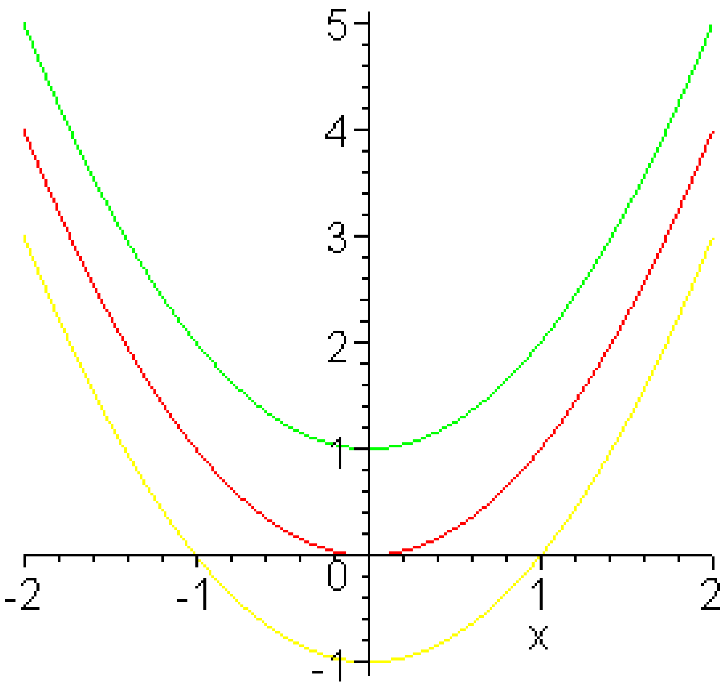
6. Взятие модуля:

а) функции $(f(x) \to |f(x)|)$, б) аргумента $(f(x) \to f(|x|))$

Примеры основных преобразований графиков функции

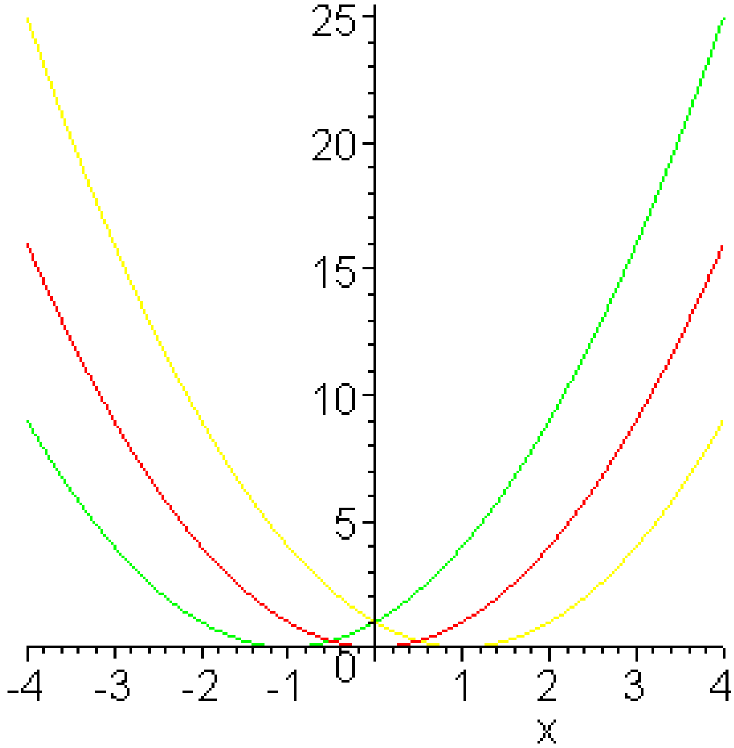
1. Вертикальный сдвиг $f(x) \to f(x)+b$

Графики функций $y=x^2, y=x^2+1, \quad y=x^2-1$



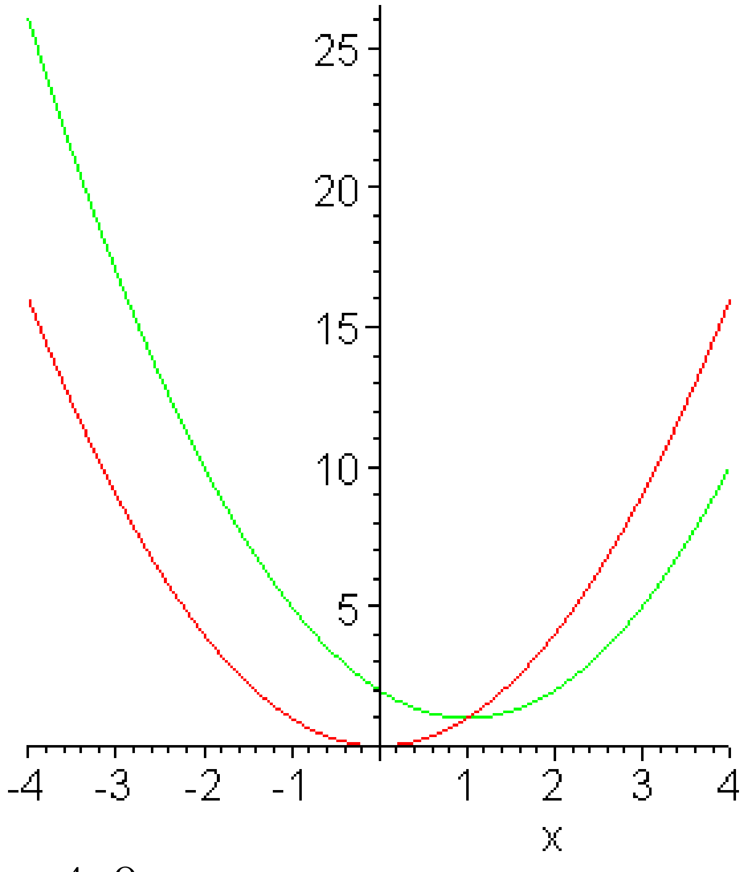
2. Горизонтальный сдвиг $f(x) \to f(x+a)$

Графики функций $y=x^2, y=(x+1)^2, \quad y=(x-1)^2-1$



3. Комбинированный сдвиг $f(x) \to f(x+a)+b$

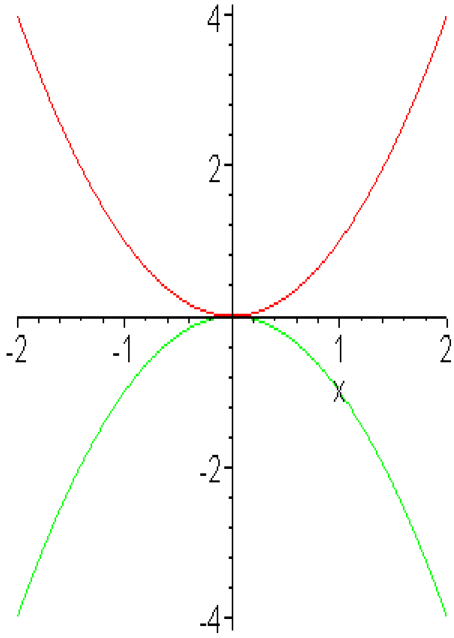
Графики функций $y = x^2, y = (x-1)^2 + 1$



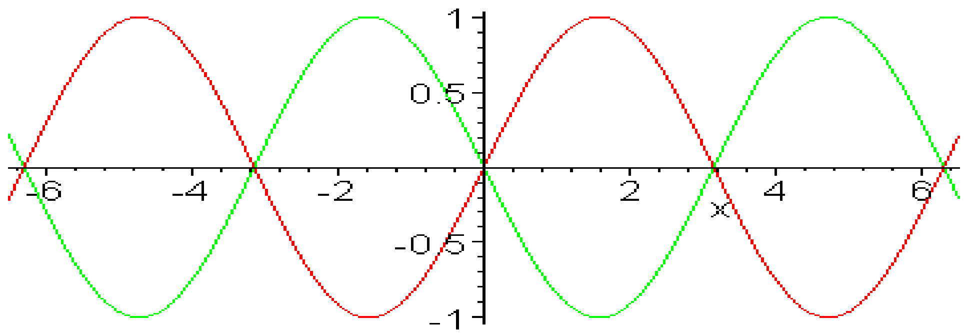
4. Отражение:

а) функции $(f(x) \to -f(x))$

Графики функций $y = x^2, y = -x^2$

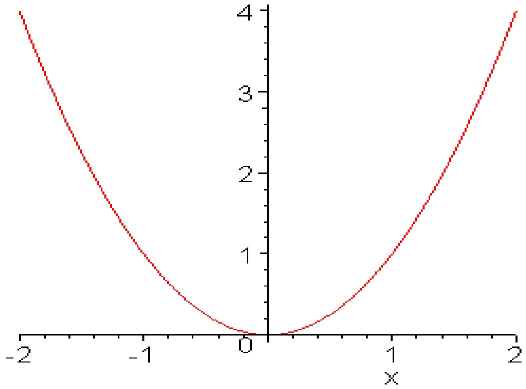


Графики функций $y = \sin x, y = -\sin x$

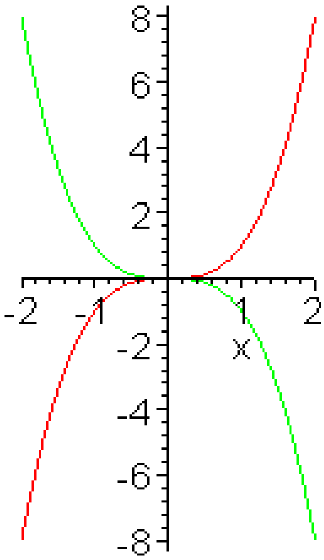


б) аргумента $(f(x) \to f(-x))$

Для четных функций график функции не изменяется, т.к. $(f(x) = f(-x))$

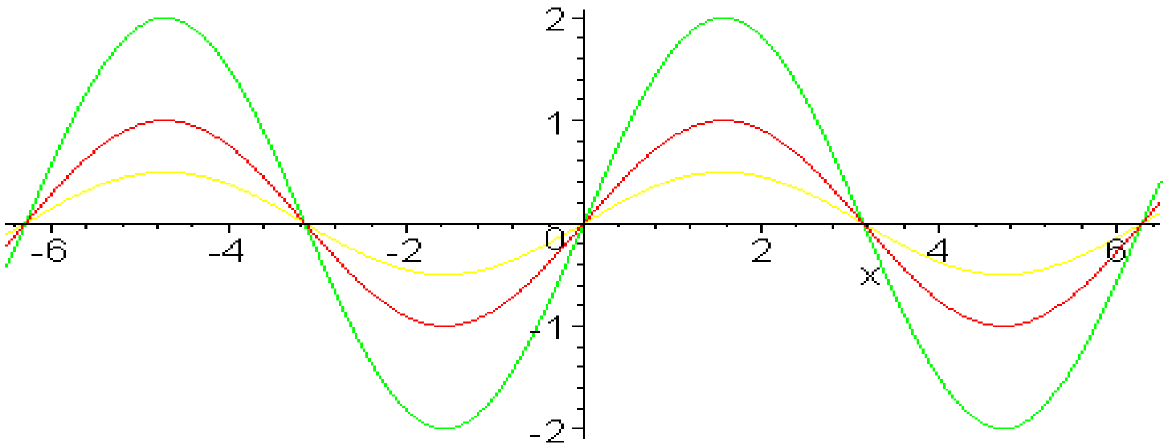


Для нечетных функций $f(-x) = -f(x)$, что аналогично отражению функции $f(x) \to -f(x)$

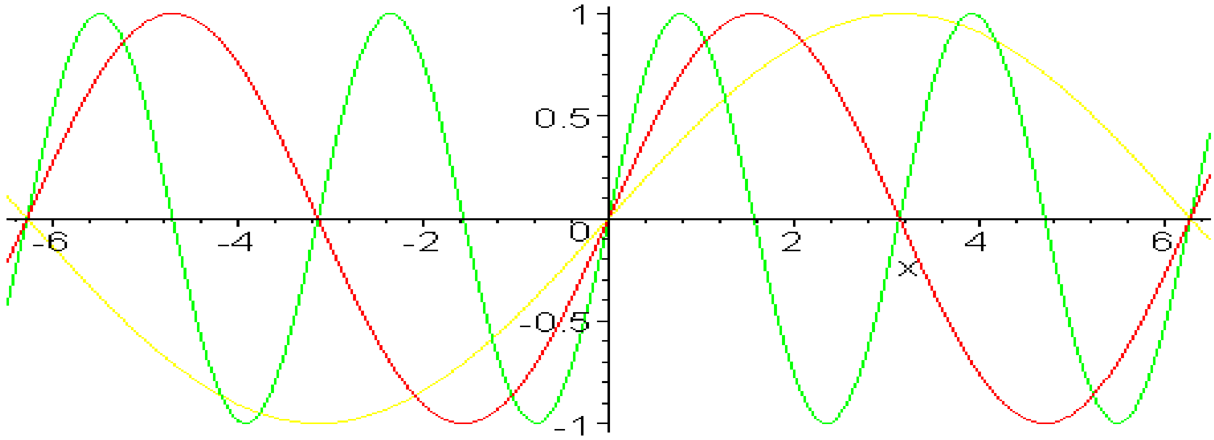


5. Растяжение $(k > 1)$ / Сжатие $(0 < k > 1)$

а) функции $(f(x) \to kf(x))$



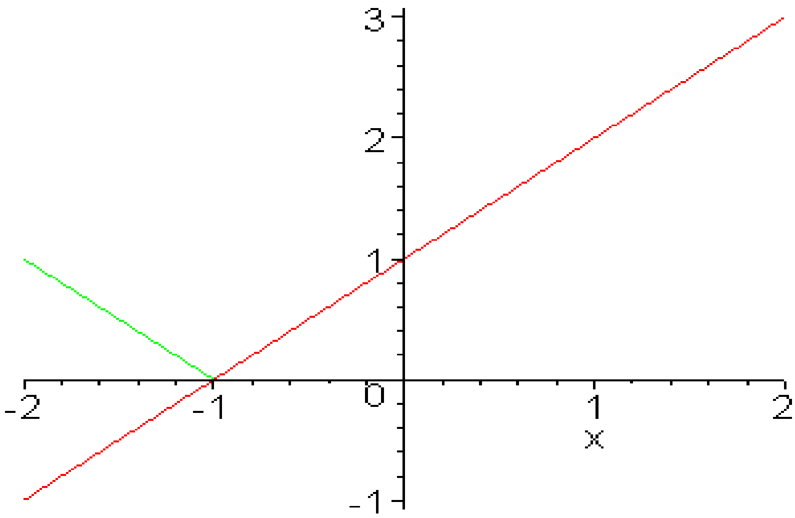
б) аргумента ($f(x) \to f(kx)$)



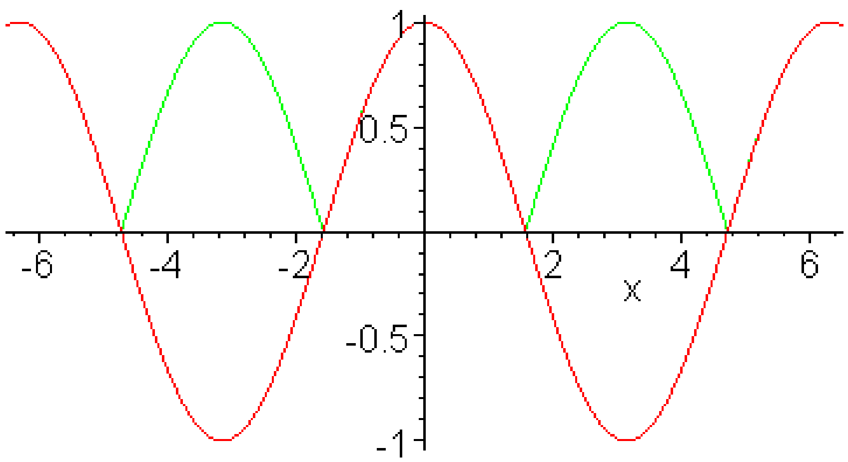
6. Взятие модуля:

а) функции ($f(x) \to |f(x)|$)

Графики функций $y = x+1$, $y = |x+1|$



Графики функций $y = \cos x$, $y = |\cos x|$



б) аргумента ($f(x) \to f(|x|)$)

Графики функций $y = x + 1$, $y = |x| + 1$

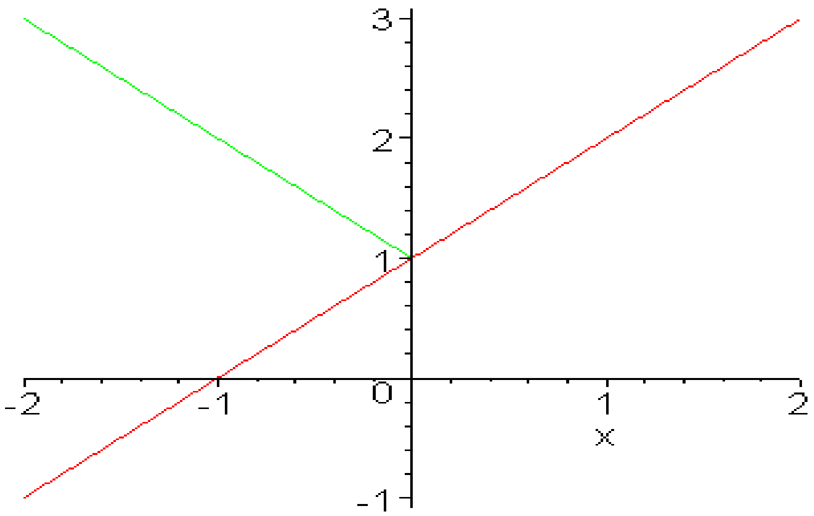


График функции $y = \sin|x|$