Лекция 3: Числовые последовательности

1. Понятие числовой последовательности. Способы задания последовательностей.
2. Свойства числовых последовательностей: Ограниченные и монотонные последовательности.
3. Предел числовой последовательности. Его геометрический смысл
4. Свойства предела числовой последовательности.

1.Числовые последовательности и способы их задания. Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1,2,3,...,n,\ldots$ поставлено в соответствие число $x_n \in R$, то множество занумерованных чисел $x_1, x_2,..., x_n,...$ называется числовой последовательностью и обозначается $\{x_n\}$. Заметим, что множество $\{x_1, x_2,...\}$ «аморфно», лишено порядка, а для элементов последовательности $x_1, x_2,...$ установлен определенный порядок. Числа $x_1, x_2,...$ называются членами последовательности: x_1 - первый член, x_2 - второй член и т.д. Член x_n с произвольным номером n называется общим членом последовательности. Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее члена. Мы будем использовать два способа задания последовательности.

Способ 1. Дается формула $x_n = f(n)$, где $f(n)$ - некоторое выражение, зависящее от n. Формулу $x_n = f(n)$ называют формулой общего члена последовательности. Если задана формула общего члена $x_n = f(n)$, то мы будем говорить, что задана последовательность $x_n = f(n)$.

Пример 1.1. Формула $x_n = 1$ задает последовательность $1,1,1,...,1,...$ Последовательности, задаваемые формулой общего члена $x_n = c$, где c - число, будем называть стационарными и обозначать символом $\{c\}$.

Пример 1.2. Формула $x_n = (-1)^n$ задает знакочередующуюся последовательность $-1,1,-1,1,...$

Пример 1.3. Формула $x_n = (-1)^{n-1}$ задает знакочередующуюся последовательность $1,-1,1,-1,...$

Определим арифметические операции для числовых последовательностей. Суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ соответственно. Везде в дальнейшем, если рассматривается последовательность $z_n = \frac{x_n}{y_n}$, будем считать, что $y_n \neq 0$ при всех n. Последовательности $z_n = x_n + c$, $z_n = x_n - c$, $z_n = cx_n$, $z_n = \frac{x_n}{c}$ можно рассматривать как сумму, разность, произведение, частное последовательности $\{x_n\}$ и стационарной последовательности

Иногда, зная несколько первых членов последовательности, требуется написать формулу общего члена. Знание первых членов последовательности ещё не определяет последовательность. Но по ним можно установить закономерность и написать одну из формул, согласующуюся с заданными членами.

Пример 1.4. По первым пяти членам последовательности $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \ldots$ можно установить формулу её общего члена $x_n = \frac{2n-1}{2n}$.

Пример 1.5. По первым десяти членам последовательности $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, 5, \frac{1}{6}, \ldots$ можно установить формулу её общего члена. Эта последовательность является «смесью» двух последовательностей. Формула для её общего члена является суммой двух формул: $x_n = [1-(-1)^n]\frac{n+1}{4} + [1+(-1)^n]\frac{1}{n+2}$.

Способ 2. Дается формула, позволяющая вычислить любой член данной последовательности по предыдущим p членам, где p - заданное натуральное число. Эта формула называется рекуррентной формулой (от латинского recurrens - возвращающийся). Кроме того, даются значения первых p членов этой последовательности.

Пример 1.6 . Рекуррентная формула $x_{n+1} = x_n + 2$, где $x_1 = 3$ (здесь $p = 1$), задает арифметическую прогрессию $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

Пример 1.7 . Рекуррентная формула $x_{n+1} = 2x_n$, где $x_1 = 3$, задает геометрическую прогрессию $3,6,12,24,48,...$

Пример 1.8 . Рекуррентная формула $x_{n+1} = (n+1)x_n$, где $x_1 = 1$, задает последовательность $1,2,6,24,120,...$

2.Свойства числовых последовательностей. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует число M (число m) такое, что все члены последовательности удовлетворяют неравенству $x_n \le M$ ($x_n \ge m$).

Пример 2.1. Последовательность $x_n = -n$ ограничена сверху, так как $-n \le -1$ при всех n. Последовательность $x_n = n^2 + 1$ ограничена снизу, так как $n^2 + 1 \ge 2$ при всех n.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу. В противном случае последовательность называется неограниченной. Легко доказать, что последовательность является ограниченной тогда и только тогда, когда существует положительное число C такое, что все члены последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| \le C$. Отсюда следует, последовательность $\{x_n\}$ является неограниченной тогда и только тогда, когда для любого положительного числа C существует такой член x_n этой последовательности, что $|x_n| > C$.

Пример 2.2. Последовательности $x_n = c$, где c - произвольная постоянная, $x_n = (-1)^n$, $x_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha > 0$, $x_n = q^n$, где $|q| \le 1$, $x_n = \sin y_n$ и $x_n = \cos y_n$, где $\{y_n\}$ - произвольная числовая последовательность, являются ограниченными последовательностями, так как $|c| \le c$, $|(-1)^n| \le 1$, $\left|\dfrac{1}{n^\alpha}\right| \le 1$, $|q^n| \le 1$, $|\sin y_n| \le 1$, $|\cos y_n| \le 1$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если при всех n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$). Возрастающие и убывающие последовательности называются строго монотонными. Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если при всех n выполняется неравенство $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$). Невозрастающие и неубывающие последовательности называются монотонными последовательностями.

Пример 2.3. Последовательность Фибоначчи $1,1,2,3,5,8,13,...$ является неубывающей, так как $x_{n+1} \geq x_n$ при всех n. Последовательность $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...$, задаваемая формулой $x_n = \frac{1}{n}$, является убывающей, так как $x_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = x_n$ при всех n.

3.Предел числовой последовательности. Выделим последовательности $\{x_n\}$ со следующим свойством: для последовательности $\{x_n\}$ существует некоторое число a, в любой ε-окрестности которого находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера. Так как ε-окрестностью точки a называется множество всех точек x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \varepsilon$, то число x_n принадлежит ε-окрестности точки a тогда и только тогда, когда $|x_n - a| < \varepsilon$.

Здесь мы подходим к очень важному понятию: понятию предела числовой последовательности. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε, сколь бы мало оно ни было, существует номер N такой, что все члены последовательности, номера которых превосходят N, удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. В этом определении число N является натуральным числом (номером).

Следующее эквивалентное определение предела последовательности. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует число N такое, что все члены последовательности, номера которых превосходят N, удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. В общем случае это число N зависит от числа ε. Тот факт, что число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Здесь $\lim$ - первые три буквы латинского слова limes - предел. Запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ читается «предел x_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a».

Свойство последовательности, иметь предел, называют сходимостью. Если у последовательности есть предел, то говорят, что данная последовательность сходится (является сходящейся), в противном случае (если у последовательности нет предела) говорят, что последовательность расходится (является расходящейся). Если число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, то используются следующие фразы: последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом число a, последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, последовательность $\{x_n\}$ стремится к a. Вместо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ используется также обозначение $x_n \to a$.

В дальнейшем мы изучим технику нахождения пределов сходящихся последовательностей. Пока рассмотрим примеры доказательства равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ при заданном значении a. При этом мы будем использовать только определение предела последовательности.

Пример 3.1. Докажем, используя только определение предела последовательности, что

$$\lim_{n\to\infty} c = c,$$

где c - произвольная постоянная, т.е. предел постоянной равен самой этой постоянной. Пусть ε - произвольное положительное число. Для этого числа ε найдем число N такое, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|c - c| < \varepsilon$.

Так как $|c-c|<\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon>0$, а $\varepsilon>0$, то неравенство $|c-c|<\varepsilon$ выполняется при всех n. В этом случае можно положить $N=0$.

Приведем свойства последовательностей, связанных с их сходимостью

1.Если последовательность имеет предел, то он единственный.

2.Если последовательность сходится, то она ограничена.

3.Теорема о сохранении знака сходящейся последовательности: если последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, то существует число N такое, что знаки всех членов последовательности $\{x_n\}$, номера которых превосходят N, совпадают со знаком числа a.

4.Теорема о трех последовательностях. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ - три последовательности, удовлетворяющих условиям $x_n \le y_n \le z_n$ при всех n и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

5. Если неубывающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она сходится.

6. Если невозрастающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, то она сходится.