Лекция 4: Предел функции.

1. Предел функции в точке и на бесконечности.
2. Теоремы о пределах.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.
4. Неопределенности.
5. Замечательные пределы.

Предел функции в точке

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, у которой регламентированы ООФ и ОИФ. Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0.

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 $(x \to x_0)$, если для любого, сколь угодно малого, наперед заданного положительного числа ε существует такое положительное число σ, зависящее от ε, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \sigma$, выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$.

В аналитическом виде предел функции $y = f(x)$ в точке x_0 принято обозначать выражением:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

где $(x \to x_0)$ – атрибут предела, а x_0 – предельное значение.

Предел функции на бесконечности

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности $(x \to \infty)$, если для любого, сколь угодно малого положительного, наперёд заданного числа ε, существует такое положительное число x_0, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > x_o$, выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$ (рис.2).

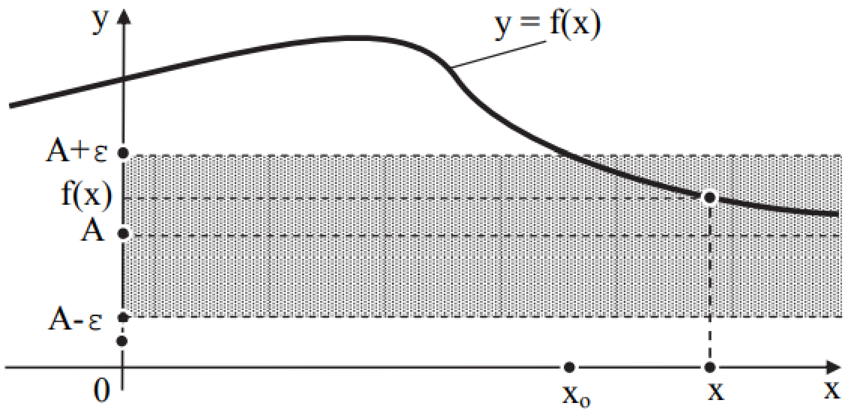

Рис. 2. Предел функции в бесконечности

В аналитическом виде предел функции $y = f(x)$ в бесконечности принято обозначать выражением: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Геометрический смысл предела функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ заключается в том, что для положительного ε всегда найдется такое положительное число x_0, что для всех $|x| > x_0$ соответствующие ординаты графика функции будут заключаться в полосе (A-ε; A+ε), какой бы узкой она ни была (см. рис. 3.2).

σ – окрестность точки x_0 состоит из двух полуокрестностей: левой и правой. Для каждой из них введем понятие одностороннего предела.

Основные теоремы о пределах функций

В табл..1 сформулированы основные теоремы об операциях над пределами. При этом имеются в виду конечные пределы функций *f(x)* и *g(x)* при $x \to \alpha$, где α – число или $\pm\infty$.

Таблица 1

Теоремы о пределах

№	Теоремы о пределах	Формула	Примечание
1	*2*	*3*	*4*
1	Предел константы равен константе	$\lim\limits_{x\to\alpha} C = C$	$C =$ const
2	Постоянный множитель C можно выносить за знак предела	$\lim\limits_{x\to\alpha} C\cdot f(x) = C\cdot\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$C =$ const
3	Предел алгебраической суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов тех же функций	$\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\pm\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	Сумма (разность) может содержать более двух слагаемых (вычитаемых)
4	Предел произведения двух функций равен произведению пределов тех же функций	$\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	Произведение может содержать более двух множителей
5	Предел частного двух функций равен частному пределов	$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)\neq 0$
6	Предел степени функции равен степени предела функции	$\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x))^m = \left(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\right)^m$	$m\in N$, где N – множество натуральных чисел
7	Предел показательной функции равен показательной функции с пределом в степени	$\lim\limits_{x\to\alpha} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}$	$a =$ const, $a\neq 1$, $a>0$
8	Предел сложной функции равен функции предела промежуточного аргумента	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)\right)$	Внешняя функция может быть, например, логарифмической, тригонометрической и др.

Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Важными понятиями в теории пределов являются понятия бесконечно малой и бесконечно большой величин.

Определение. Функция $y = \alpha\ (x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Выделим понятие функции как бесконечно малой величины на бесконечности.

Определение. Функция $y = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to \infty$, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1. Если функция $y = f(x)$ имеет предел A при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Справедливо и обратное утверждение.

2. Алгебраическая сумма (разность) конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.
4. Произведение бесконечно малой функции на постоянную величину есть бесконечно малая функция.

5. Произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
6. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, есть бесконечно малая функция.

Определение. Функция $y = \beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$ или при $x \to \infty$, если ее предел равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \to \infty} \beta(x) = \infty.$$

5. Произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

6. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, есть бесконечно малая функция.

Определение. Функция $y = \beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_o$ или при $x \to \infty$, если ее предел равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_o} \beta(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \to \infty} \beta(x) = \infty.$$

Свойства бесконечно больших функций:

1. Алгебраическая сумма бесконечно больших функций одного знака при $x \to x_o$ есть бесконечно большая функция при $x \to x_o$.

2. Произведение бесконечно большой функции на ограниченную функцию, предел которой отличен от нуля, есть бесконечно большая функция.

3. Частное от деления бесконечно большой функции на функцию, предел которой не равен бесконечности, есть функция бесконечно большая.

Необходимо отметить ***связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами***.

Теорема. Если функция $y = \alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to x_o$ (или $x \to \infty$), то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)} = \beta(x)$ − бесконечно большая при $x \to x_o$ (или $x \to \infty$):

$$\lim_{x \to x_o} \frac{1}{\alpha(x)} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty \text{ или } \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\alpha(x)} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty.$$

И наоборот, если функция $y = \beta(x)$ бесконечно большая при $x \to x_o$ (или $x \to \infty$), то функция $\dfrac{1}{\beta(x)} = \alpha(x)$ − бесконечно малая при $x \to x_o$ (или $x \to \infty$):

$$\lim_{x \to x_o} \frac{1}{\beta(x)} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 \text{ или } \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\beta(x)} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.$$

Следствие теоремы проявляется в ***двух правилах*** :

- ***правило 1:*** $\dfrac{C}{0} = \infty$ − частное от деления постоянной величины на бесконечно малую величину есть величина бесконечно большая;

- ***правило 2:*** $\frac{C}{\infty}=0$ – частное от деления постоянной величины на бесконечно большую величину есть величина бесконечно малая.

Для сравнения двух бесконечно малых величин $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ при $x \to x_o$ находят предел их отношения: $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=C$.

- Если $C=1$, то $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются ***эквивалентными*** (равносильными) ***бесконечно малыми*** величинами.

Например, при $x \to 0$ таковыми являются:

1. $\sin\alpha x \sim \alpha x$;
2. $1-\cos\alpha x \sim \frac{(\alpha x)^2}{2}$;
3. $\arcsin\alpha x \sim \alpha x$;
4. $\mathrm{tg}\alpha x \sim \alpha x$;
5. $\mathrm{arctg}\alpha x \sim \alpha x$;
6. $\ln(1+\alpha x)\sim \alpha x$;
7. $a^{\alpha x}-1\sim \alpha x\cdot\ln a$;
8. $1-e^{\alpha x}\sim \alpha x$;
9. $(1+\alpha x)^p-1\sim p\cdot\alpha x$;
10. $\sqrt[n]{1+\alpha x}-1\sim\frac{\alpha x}{n}$.

- Если $C\neq 0$, то $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются бесконечно малыми величинами одного порядка малости.
- Если $C=0$, то $\alpha_1(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\alpha_2(x)$, а $\alpha_2(x)$ – более низкого порядка по сравнению с $\alpha_1(x)$.
- Если $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2{}^n(x)}=C$, где $0<|C|<\infty$, то $\alpha_1(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с $\alpha_2(x)$ при $x\to x_o$.

Понятие неопределенности при вычислении пределов

Если задан предел $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=0$, то его можно интерпретировать как сравнение двух бесконечно малых функций, а отношение $\left(\frac{0}{0}\right)$ квалифицировать как неопределенность. Путём преобразования предела неопределенность требуется устранить.

Аналогично, если задан предел $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\infty$, то его можно рассматривать как сравнение бесконечно больших величин с неопределенностью вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, устраняемого преобразованием предела.

Если вычисляется предел $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)-g(x))$, где f(x) и g(x) бесконечно большие величины одного знака, или $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))$, где f(x) и g(x) бесконечно большие величины противоположных знаков, то констатируем неопределенность вида $(\infty-\infty)$.

При вычислении предела $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)\cdot g(x))$ возникает неопределенность $(\infty\cdot 0)$, когда $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$.

При вычислении предела показательно-степенной функции $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x))^{g(x)}$ могут возникнуть неопределенности вида (1^{∞}), (∞^{0}), (0^{0}).

Условия, при которых возникают эти неопределенности, связаны с пределами функций $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x))$, $\lim\limits_{x\to\alpha}(g(x))$.

Первый замечательный предел

Первый замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x}{\sin\alpha x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$$

В общем случае, когда аргументом синуса является функция $f(x)$, аналитическая форма записи первого замечательного предела имеет вид:

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1 \quad \text{или} \quad \lim_{f(x)\to 0}\frac{f(x)}{\sin f(x)}=1.$$

Второй замечательный предел

С помощью второго замечательного предела может быть раскрыта неопределенность $\left(1^{\infty}\right)$.

Второй замечательный предел имеет вид: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Рассмотрим частные случаи второго замечательного предела, удобные при решении отдельных задач.

Преобразуем соотношение $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$, выполнив подстановку:

$\dfrac{1}{x}=t \;\rightarrow\; x=\dfrac{1}{t}$, при $x\to\infty$, $t\to 0$, тогда предел примет вид:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=\left(1^{\infty}\right)=e.$$

В общем случае, если переменную x заменить функцией $f(x)$, аналитическая форма записи второго замечательного предела имеет вид:

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=\left(1^{\infty}\right)=e$$ – **первая форма**;

$$\lim_{f(x)\to 0}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}=\left(1^{\infty}\right)=e$$ – **вторая форма**.