ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача. Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(x^3-10x^2+1\right)}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos x-1}$ **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

Решение

а)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(x^3-10x^2+1\right)}=\left|\begin{array}{l}\textit{подстановка в знаменатель } \infty \textit{ приводит}\\ \textit{к неопределённости вида } \infty-\infty\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(x^3-10x^2+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{10x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3\left(1-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\cdot 1=\frac{1}{\infty}=0$$

Поскольку при $x\to\infty$ **функции** $\dfrac{10}{x},\dfrac{1}{x^3}$ **являются бесконечно малыми и их пределы равны нулю.**

Смотри таблицу элементарных пределов.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$

Решение

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\left[\frac{1-\sqrt{1}}{1-\sqrt[3]{1}}=\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\textit{надо избавиться от радикалов}\\ \text{1) } \textit{домножим числитель и знаменатель}\\ \textit{на } (1+\sqrt{x})\\ \text{2) } \textit{домножим числитель и знаменатель}\\ \textit{на неполный квадрат суммы } (1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}^2)\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdot(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\cdot(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\left(1-x\right)\cdot(1+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1+\sqrt{x})}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Использовали формулы разности квадратов и разности кубов:

1) **Разность квадратов двух чисел** $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
2) **Сумма (разность) кубов двух чисел** $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos x-1}$

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1}=\left[\frac{0^2}{\cos 0-1}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{c}\textit{используем метод замены бесконечно}\\ \textit{малых эквивалентными функциями}\\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=-2$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty=1^\infty\right]=\left|\begin{array}{c}\textit{выполним тождественные преобразования функции}\\ \textit{приведём её к виду}\\ \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha,\ \textit{чтобы использовать второй}\\ \textit{замечательный предел}\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\right)^{-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$