# Лекция №5

# Непрерывность функции

# ПЛАН:

I. Понятие непрерывности.
II. Функция, непрерывная на интервале и в точке.
III. Свойства функций непрерывных в точке
IV. Точки разрыва функции и их классификация.

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

**Определение 1.** Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** при $x = x_0$ или **в точке** $x_0$, если

1) функция $f(x)$ определена в точке $x_0$ и в некоторой её окрестности;

2) функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to x_0$;

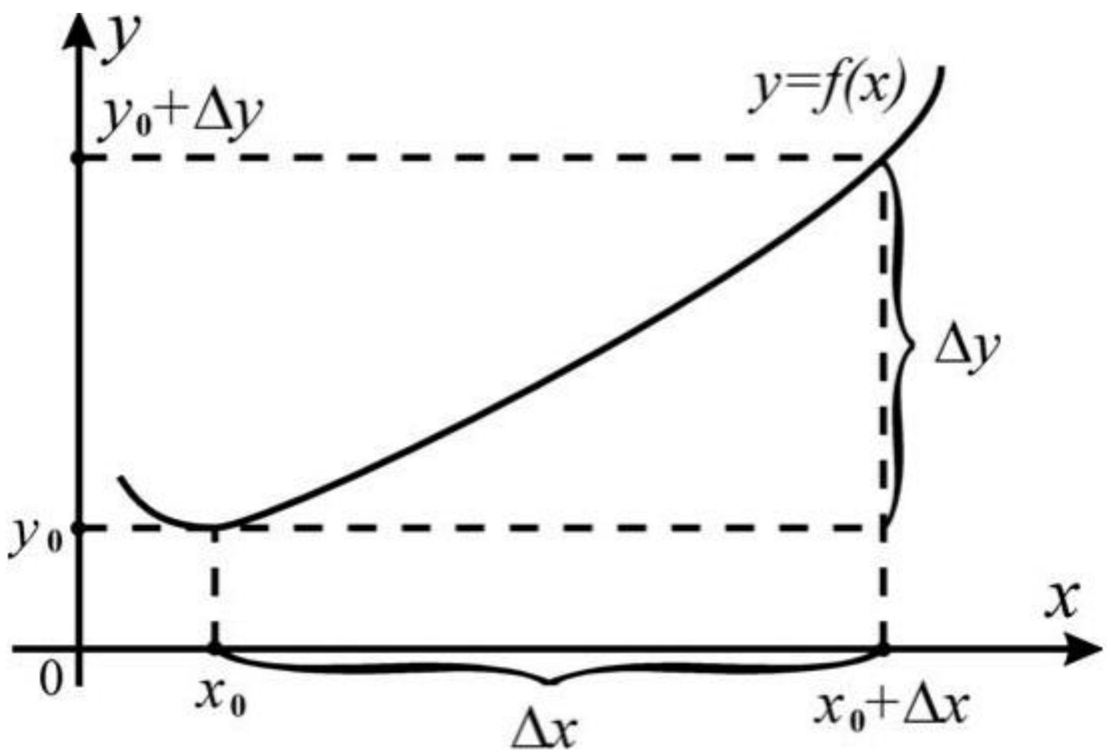
3) предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен значению функции $f(x)$ в точке $x_0$, то есть выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если в точке $x_0$ функция непрерывна, то точка $x_0$ называется **точкой непрерывности** данной функции.

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

**Определение 2.** Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x_0$, если эта функция определена в какой-нибудь окрестности точки $x_0$ и если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то есть если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.



# Односторонняя непрерывность

**Односторонняя непрерывность.** Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной слева* в точке $x_0$, если она определена на некотором полуинтервале $(a; x_0]$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной справа* в точке $x_0$, если она определена на некотором полуинтервале $[x_0; a)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке. При этом $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ

**Непрерывность функции на множестве.** Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $X$, если она является непрерывной в каждой точке $x$ этого множества. При этом если функция определена в конце некоторого промежутка числовой оси, то под непрерывностью в этой точке понимается непрерывность справа или слева.

В частности, функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она

1) непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$;
2) непрерывна справа в точке $a$;
3) непрерывна слева в точке $b$.

# Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (где $g(x) \neq 0$) также непрерывны в точке $x_0$.

2. Если функция $u(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке $x_0$.

3. Все основные элементарные функции ($c$, $x^a$, $a^x$, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$) непрерывны в каждой точке своих областей определения.

# Свойства функций, непрерывных на отрезке

1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда для любого числа $C$, заключенного между числами $f(a)$ и $f(b)$, ( $f(a)<C<f(b)$ ) найдется хотя бы одна точка $x_0 \in [a;b]$, такая, что $f(x_0)=C$ (*теорема о промежуточных значениях*).

2. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах значения различных знаков. Тогда найдется хотя бы одна точка $x_0 \in [a;b]$, такая, что $f(x_0)=0$ (*теорема Больцано – Коши*).

3. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда эта функция ограничена на этом отрезке (*1-я теорема Вейерштрасса*).

4. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда эта функция достигает на отрезке $[a;b]$ своего наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a;b]$, что для любой точки $x \in [a;b]$ справедливы неравенства $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ (*2-я теорема Вейерштрасса*).

# Точки разрыва

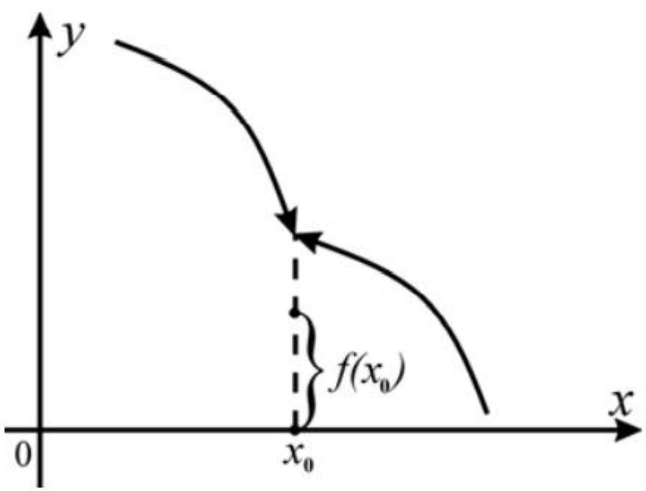
**Точки разрыва функции.** Точка $x_0$, принадлежащая области определения функции $y = f(x)$, или являющаяся граничной точкой этой области, называется *точкой разрыва данной функции*, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

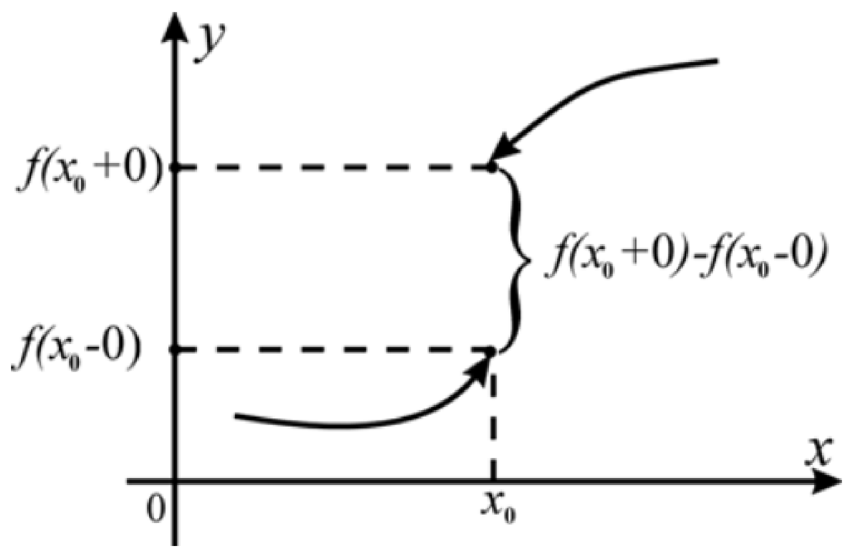
## Точки разрыва первого рода.

1) если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, причем не все три числа $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, $f(x_0)$ равны между собой, то $x_0$ называется *точкой разрыва I рода*.

В частности, если левый и правый пределы функции в точке $x_0$ равны между собой, но не равны значению функции в этой точке: $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A\neq f(x_0)$, то $x_0$ называется *точкой устранимого разрыва*. В этом случае, положив $f(x_0)=A$, можно видоизменить функцию в точке $x_0$ так, чтобы она стала непрерывной (*доопределить функцию по непрерывности*).

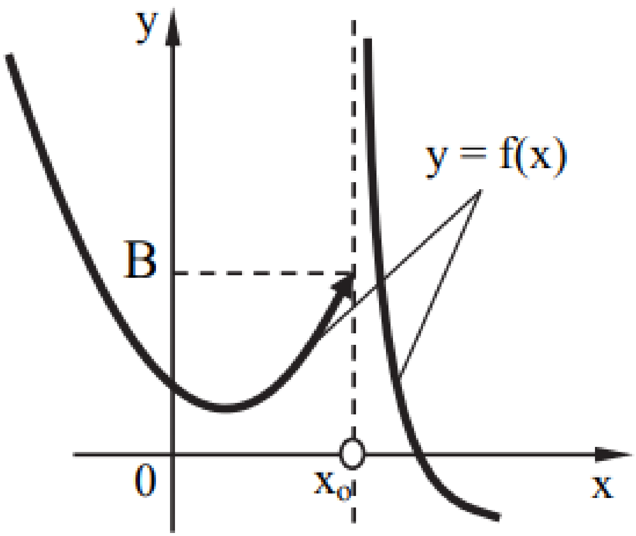
Разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком функции в точке* $x_0$. Скачок функции в точке устранимого разрыва равен нулю;



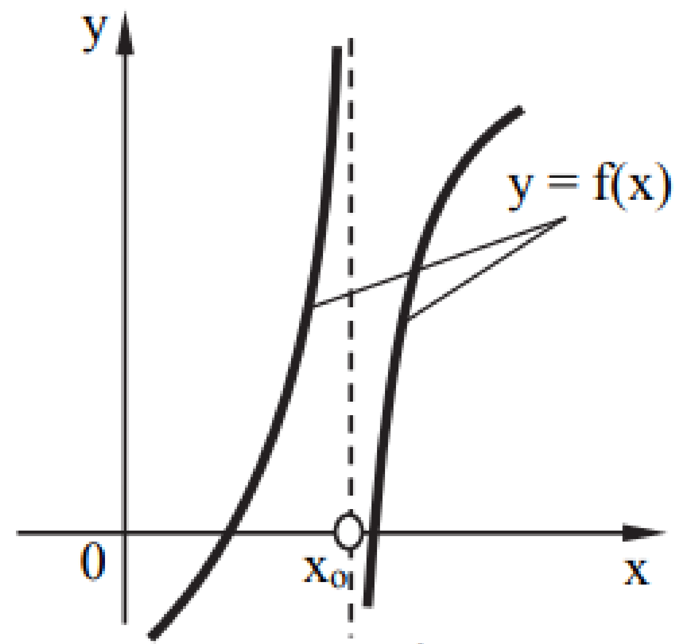



# Точки разрыва второго рода.

2) точки разрыва, не являющиеся точками разрыва первого рода, называются *точками разрыва II рода*. В точках разрыва II рода не существует или бесконечен хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.




$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = B, \\ \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = +\infty. \end{cases}$$




$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = +\infty, \\ \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = -\infty. \end{cases}$$

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!