Лекция № 8
Производные и дифференциалы высших порядков

План:

1) Производные и дифференциалы высших порядков.
2) Формула Тейлора. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.
3) Разложение некоторых элементарных функций по формуле Тейлора (Маклорена)

Производные и дифференциалы высших порядков.

Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором интервале I. Тогда её производная $f'(x)$ есть функция, заданная на I, и можно рассматривать вопрос о её дифференцировании. *Производная этой производной называется* ***второй производной*** *функции* $f(x)$, *или* ***производной второго порядка*** *этой функции и обозначается* $f''(x)$. Таким образом,

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' \tag{1}$$

Аналогично определяется ***производная любого порядка*** $n = 3, 4, \ldots$ функции $f(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \tag{2}$$

Производной нулевого порядка функции $f(x)$ называют саму эту функцию. Таким образом, формула (2) справедлива при $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Функцию $f(x)$, имеющую на интервале I все производные до порядка n включительно, называют ***n раз дифференцируемой*** на этом интервале. Если, к тому же, $f^{(n)}(x)$ непрерывна на интервале I (а, значит, непрерывны и все производные более низкого порядка), то говорят, что $f(x)$ ***n раз непрерывно дифференцируема на I .***

Очевидно, *все элементарные функции бесконечно дифференцируемы в своих областях определения, т.е. имеют там производные всех порядков.*

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ n раз дифференцируемы при некотором x, то тем же свойством обладают функции $f(x)+g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$, причём*

$$\left[f(x)+g(x)\right]^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$$

$$\left[f(x)g(x)\right]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

Последнее соотношение называется ***формулой Лейбница.*** **(**Напомним, что $C_n^k=\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэфициенты, и по определению $0!=1$).

Вторым дифференциалом, *или* ***дифференциалом второго порядка****, функции y = f (x) называется дифференциал её дифференциала, рассматриваемого как функция от x при постоянном приращении dx независимой переменной*:

$$d^2f(x)=d\left(df(x)\right)=d\left(f'(x)dx\right)=\left(f'(x)dx\right)'dx=f''(x)(dx)^2$$

или, окончательно,

$$d^2f(x)=f''(x)(dx)^2. \qquad (3)$$

Аналогично определяется ***дифференциал*** *любого* ***порядка n*** *функции* $f(x)$:

$$d^nf(x)=d\left(d^{n-1}f(x)\right)=f^{(n)}(x)(dx)^n. \qquad (4)$$

Последняя формула позволяет использовать для n-ой производной функции $f(x)$, кроме обозначения $f^{(n)}(x)$, ещё и обозначение $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$ (или $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, если функция обозначается $y(x)$). Для краткости условливаются не ставить в скобки dx в знаменателе.

Формула Тейлора. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ определена в некотором интервале I числовой оси и имеет в точке $x_0\in I$ все производные до порядка n включительно. Тогда для всех $x\in I$, достаточно близких к x_0, имеет место следующая* ***формула Тейлора*** (Брук Тейлор, 1685 – 1731):

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x), \qquad (7)$$

в которой

а) $T_n(x)$ *есть многочлен степени n, значение которого, так же, как и значения его производных до порядка n включительно в точке* x_0, *совпадают с соответствующими значениями функции* $f(x)$, *т.е.*

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T_n'(x_0) = f'(x_0), \quad \ldots, \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0); \qquad (8)$$

б) Функция $R_n(x)$, *называемая* ***n-ым остаточным членом*** **(*или n-ым остатком*)** *формулы Тейлора, определяется равенством*

$$R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right), \quad (x \to x_0). \qquad (9)$$

В развёрнутом виде она записыва ется так:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right), \qquad (x \to x_0) \end{aligned}} \qquad (14)$$

Важный частный случай получается, если положить $x_0 = 0$. *Тогда формула Тейлора* (14) *принимает вид:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + o\left(x^n\right), \quad (x \to 0) \qquad (14)$$

и называется ***формулой Маклорена*** (Колен Маклорен, 1698 – 1746). Она менее громоздка. Рассмотрим несколько примеров разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена. Читатель легко проверит их справедливость, вычисляя последовательные производные разлагаемых функций в нуле:

$$\boxed{\begin{aligned} & e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\ & \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ & \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\ & \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \\ & (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right) \end{aligned}} \qquad (15)$$

В случае необходимости использовать общую формулу Тейлора (14) с $x_0 \neq 0$ можно зачастую упростить выкладки, сводя дело к формуле Маклорена. Для этого следует ввести новую независимую переменную $t = x - x_0$. Тогда разложение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 сведётся к разложению функции $\tilde{f}(t) = f(x_0 + t)$ в окрестности точки $t = 0$.

Разложить по формуле Тейлора функцию $\cos x$ в окрестности точки $x_0 \neq 0$.
Имеем, полагая $t = x - x_0$,

$$\cos x = \cos[x_0 + t] = \cos x_0 \cos t - \sin x_0 \sin t =$$

$$= \cos x_0 \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + o\left(t^{2k+1}\right) \right] - \sin x_0 \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(t^{2k+2}\right) \right] =$$

$$= \cos x_0 - \sin x_0 \cdot t - \frac{\cos x_0}{2!} t^2 + \frac{\sin x_0}{3!} t^3 + \frac{\cos x_0}{4!} t^4 - \frac{\sin x_0}{5!} t^5 - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{\cos x_0}{(2n)!} t^{2n} - (-1)^n \frac{\sin x_0}{(2n+1)!} t^{2n+1} + o\left(t^{2n+1}\right).$$

Осталось заменить t на $x - x_0$, чтобы получить искомое разложение.

Этот пример иллюстрирует выгоду не только от использования формулы Маклорена, но и от наличия “под рукой” определённого запаса уже известных разложений для самых “ходовых” функций. Особенно полезны в этом смысле стандартные разложения (15).

Вернёмся от примеров к теории и отметим, что если о поведении функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 известно больше, чем это предполагается условиями теоремы 2, то, соответственно, можно получить и больше информации о поведении остатка $R_n(x)$. Пусть функция $f(x)$ имеет производные не только до порядка n, а до порядка $n + 1$ включительно, причём не только в точке x_0, но и в некоторой её окрестности. Тогда остаточный член формулы Тейлора можно записать в виде

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}, \qquad (16)$$

где x – произвольная точка области определения $f(x)$, лежащая в указанной окрестности, а c – некоторая точка, расположенная строго между x_0 и x (c зависит, строго говоря, от x_0 и x).

Эта формула позволяет не только знать, что относительная ошибка от замены функции её многочленом Тейлора стремится к нулю при $x \to x_0$, но и дать числовую оценку этой ошибки в заданной окрестности числа x_0.

Для доказательства формулы (16) преобразуем отношение $\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$, т.е. $\dfrac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ по формуле Коши несколько раз, используя условия (8):

Для доказательства формулы (16) преобразуем отношение $\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$, т.е. $\dfrac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ по формуле Коши несколько раз, используя условия (8):

$$\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\left[f(x)-T_n(x)\right]-\left[f(x_0)-T_n(x_0)\right]}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{f'(c_1)-T_n{}'(c_1)}{(n+1)(c_1-x_0)^n} =$$

$$= \frac{\left[f'(c_1)-T_n{}'(c_1)\right]-\left[f'(x_0)-T_n{}'(x_0)\right]}{(n+1)\left[(c_1-x_0)^n-(x_0-x_0)^n\right]} = \frac{f''(c_2)-T_n{}''(c_2)}{(n+1)n(c_2-x_0)^{n-1}} =$$

$$= \ldots = \frac{f^{(n)}(c_n)-T_n^{(n)}(c_n)}{(n+1)n \ldots \cdot 3 \cdot 2(c_n-x_0)},$$

где точка c_1 лежит между x_0 и x, точка c_2 – между x_0 и c_1, …, точка c_n – между x_0 и c_{n-1}. Теперь применим формулу Лагранжа на интервале $[x_0, c_n]$ к функции $f(x)-T_n(x)$ для преобразования числителя последнего выражения. В результате функция $\dfrac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ примет вид

$$\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)(c_n-x_0)}{(n+1)!(c_n-x_0)} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

где c лежит между x_0 и c_n, т.е. между x_0 и x, что и требовалось.

Итак, мы располагаем теперь выражениями (9) и (16) для ***остаточного члена*** $R_n(x)$ ***формулы Тейлора***. Первое из них называется ***формой Пеано*** (Джузеппе Пеано, 1858-1932), а второе – ***формой Лагранжа*** остаточного члена.