Лекция №1

Тема: «Несобственные интегралы»

План

1. Несобственные интегралы I рода

- *определение*
- *геометрическая интерпретация*
- *вычисление*

2. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода

3. Несобственные интегралы II рода

- *определение*
- *геометрическая интерпретация*
- *вычисление*
- ***признаки сходимости***

Несобственные интегралы I рода

<u>Определение 1:</u> несобственным интегралом от функции $f(x)$ **в интервале** $[a,+\infty)$

называется предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ **при** $b \to +\infty$

то есть $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если не существует, то *расходящимся*

<u>Определение 2:</u> несобственным интегралом от функции $f(x)$ **в интервале** $(-\infty; b]$

называется предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ **при** $a \to -\infty$

то есть $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$.

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется ***сходящимся,*** **а если не существует, то** ***расходящимся***

- Если функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, то может существовать ***несобственный интеграл данной функции с двумя бесконечными пределами интегрирования***, определяющийся формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

- где с — произвольное число.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

ЗАМЕЧАНИЕ

- ***Несобственный интеграл***

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

называют сходящимся, если существуют оба предела в правой части равенства, и расходящимся, если не существует хотя бы один из них

Несобственные интегралы (или интегралы Римана) I рода - это интегралы с бесконечными пределами интегрирования

$$I = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Вычисление несобственных интегралов

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

Примеры.
Исследовать на сходимость интегралы:

1) $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

РЕШЕНИЕ

Задан несобственный интеграл первого рода с бесконечным верхним пределом.

По определению

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x} dx$$

1) Вычислим интеграл:

$$\int_0^b e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^b = \frac{1}{e^x}\Big|_b^0 = 1 - \frac{1}{e^b}$$

2) Вычислим предел:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^b}\right)=1-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b}=1$$

Ответ: несобственный интеграл сходится и равен 1 (или сходится к 1)

2) $I = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$

- **РЕШЕНИЕ**

Задан несобственный интеграл первого рода с бесконечным верхним пределом.

По определению $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x}$

1) Вычислим интеграл:

$$\int_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{1}^{b} = \ln b - \ln 1 = \ln b$$

2) Вычислим предел

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\ln b\right)=+\infty$$

Ответ: несобственный интеграл расходится

3) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

РЕШЕНИЕ

Задан несобственный интеграл первого рода с бесконечными верхним и нижним пределами.

По определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} dx$$

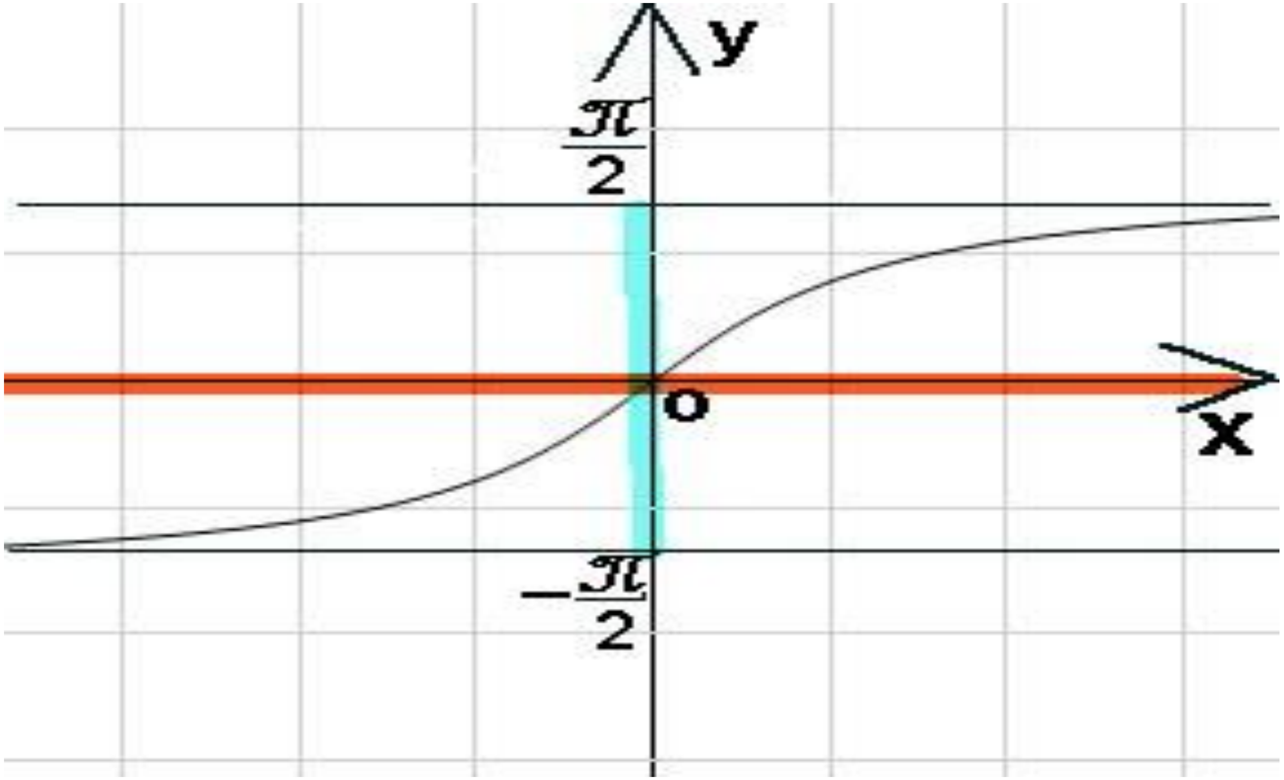
1) Вычислим интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = (arctgx)\Big|_a^b = arctgb - arctga$$

2) Вычислим предел

$$\lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} (arctgb - arctga) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

ОТВЕТ: несобственный интеграл сходится и равен π

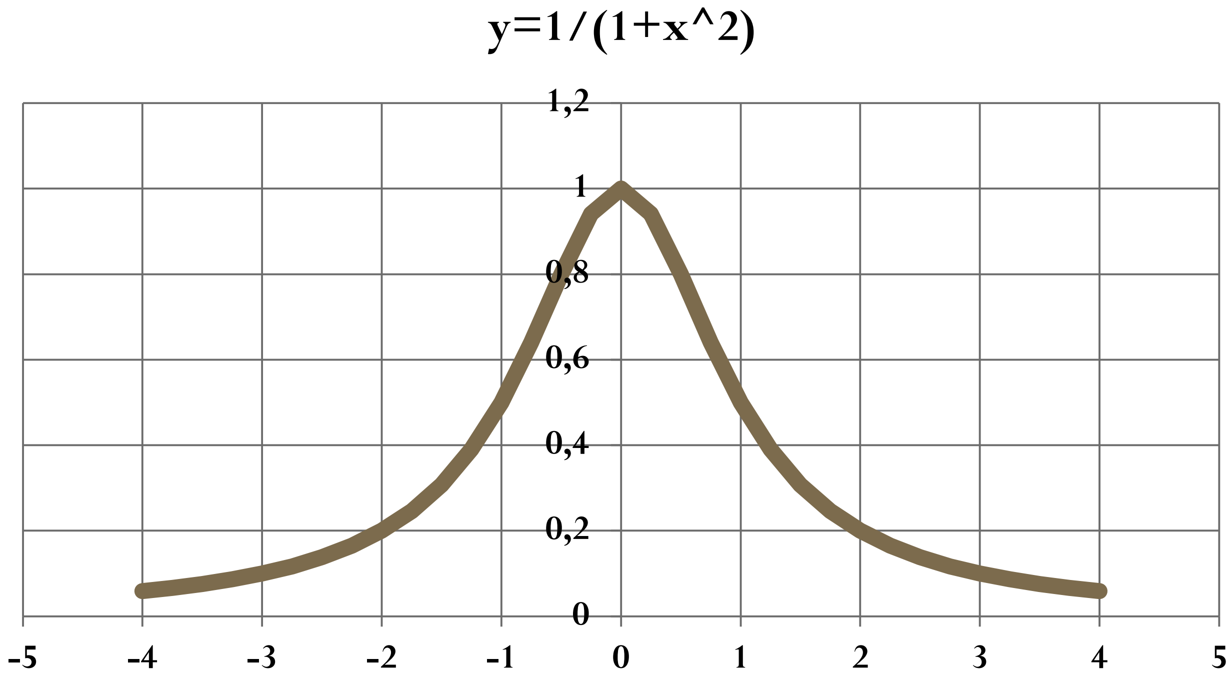

y
$\frac{\pi}{2}$
o
x
$-\frac{\pi}{2}$

Геометрический смысл несобственного интеграла I рода

- Несобственный интеграл выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$$



Признаки сходимости несобственных интегралов I рода

- Вопрос о сходимости несобственных интегралов усложняется, если первообразная функция неизвестна.
- В таких случаях иногда удается решить вопрос о сходимости, используя специальные **признаки,** которые не требуют знания первообразной

Признак сравнения 1.

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ во всех точках интервала $[a,+\infty)$ неотрицательна: $f(x) \geq 0$

и для всех значений x выполняется неравенство: $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$

Тогда:

1)если сходиться интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

2)если расходиться интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится и интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$

Пример

Решить вопрос о сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Решение

Так как при $x > 0$ $e^{-x^2} < e^{-x}$ и интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$

сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Подынтегральная функция чётная, поэтому

интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Таким образом, заданный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ сходится.

Замечание

1. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ ***называется интегралом***

Пуассона и играет очень большую роль в теории вероятностей.

2. Сформулированный признак сравнения относится только к функциям, сохраняющим один и тот же знак в бесконечном интервале интегрирования

Исследование интегралов от функций, не сохраняющих постоянный знак, например таких, как

$$\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{1+x^2}$$

Признак сравнения 2.

Если сходиться интеграл $\int\limits_{a}^{-\infty} \left| f(x) \right| dx$

(интеграл от модуля функции $f(x)$),

то сходится и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$

При этом интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ называется

а б с о л ю т н о

с х о д я щ и м с я

Замечание

1) Если сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$, то абсолютно

сходятся и интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x dx$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x dx$

так как модули подынтегральных функций не превосходят $|f(x)|$

2) Если интеграл от $|f(x)|$ расходится, то об интеграле от $f(x)$ на одном этом основании ещё ничего нельзя сказать: он может расходиться, а может и сходиться.

В последнем случае говорят, что $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ***с х о д и т с я   у с л о в н о***

Пример

- Интеграл Дирихле $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ **сходится**, а интеграл $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ (от модуля подынтегральной функции) **расходится.**

Следовательно, интеграл Дирихле **сходится условно.**

Его величина вычислена специальными приёмами равна:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Несобственные интегралы II рода

<u>Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв в точке</u> $x=b$

<u>Определение 1:</u> несобственным интегралом от функции $f(x)$ **непрерывной в интервале** $[a;b)$

и неограниченной при $x \to b$

называется предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ **при** $\varepsilon \to 0$

Записывают это так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \varepsilon > 0$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *с х о д я щ и м с я,* а если не существует, то *р а с х о д я щ и м с я*

Пусть функция $f(x)$ **имеет разрыв в точке** $x = a$

Определение 2: несобственным интегралом от функции $f(x)$ **непрерывной в интервале** $(a;b]$ **и неограниченной при** $x \to a$

называется предел интеграла $\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$ **при** $\delta \to 0$.

Записывают это так:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx, \delta > 0$$

Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся,* а если не существует, то *расходящимся*

Замечание

- Если первообразная функция $F(x)$ известна, то в обоих случаях можно записать, что

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Где $F(b) = \lim_{x \to b} F(x)$ (или $F(a) = \lim_{x \to a} F(x)$) - предел, к которому стремится первообразная $F(x)$ при $x \to b$ (или при $x \to a$).

Если этот предел **не существует, то интеграл расходится**

Точка разрыва функции находится внутри отрезка интегрирования

- **Определение 3**. Несобственным интегралом от функции $f(x)$, имеющей разрыв во внутренней точке $x = c$ отрезка интегрирования $[a;b]$, называется интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

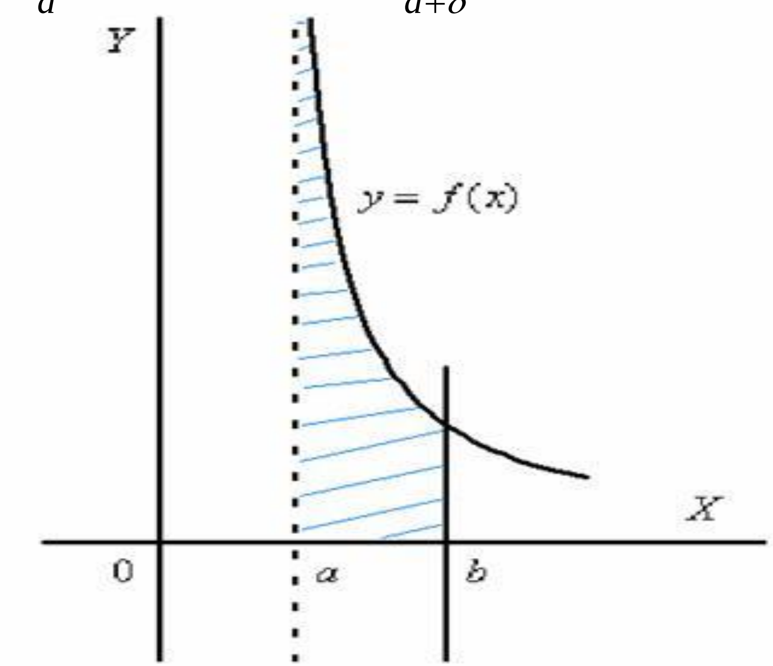
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

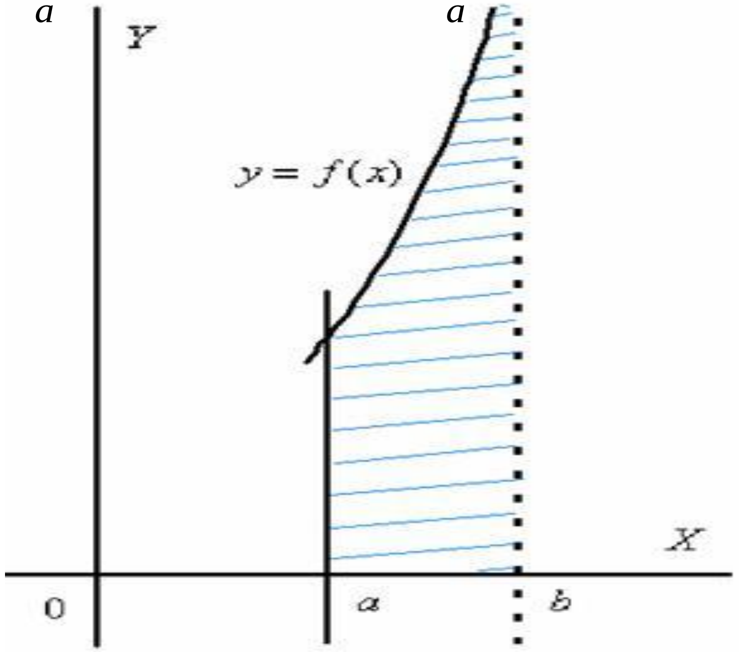
Геометрический смысл несобственных интегралов II рода

Несобственный интеграл, если он существует, выражает площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx, \delta > 0$$

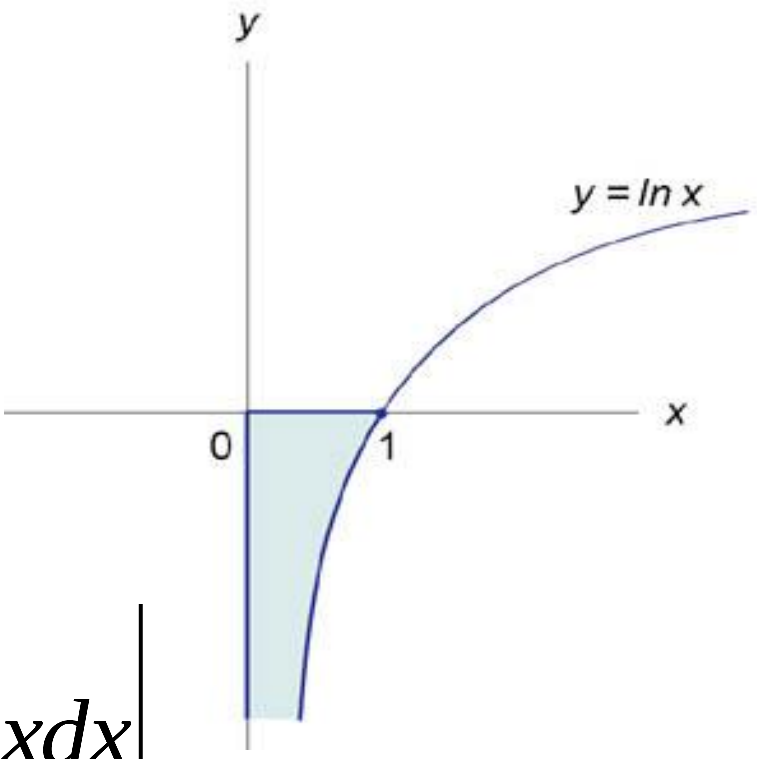
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \varepsilon > 0$$





Пример

Найти площадь под кривой $y = \ln x$ в интервале от $x = 0$ до $x = 1$



$$S = \left| \int_0^1 \ln x dx = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \ln x dx \right|$$

Решение

$$\int_a^1 \ln x dx = [x\ln x - x]_a^1 = F(1) - F(a),$$

$$где \quad F(1) = (1\cdot\ln 1 - 1) = -1,$$

$$F(a) = \lim_{a\to 0}(a\ln a - a) = \lim_{a\to 0}(a\ln a) = [0\cdot\infty]$$

- Преобразуем неопределённость вида $[0\cdot\infty]$

$$\lim_{a\to 0}(a\ln a) = [0\cdot\infty] = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\ln a}{\frac{1}{a}}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

- Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{\ln a}{\frac{1}{a}}\right) = \lim_{a\to 0}\frac{(\ln a)'}{\left(\frac{1}{a}\right)'} = \lim_{a\to 0}\frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = \lim_{a\to 0}(-a) = 0$$

- Ответ: искомая площадь равна $S = |-1| = 1(ед.пл.)$