Лекция№2

Тема:
«Дифференцирование функции многих переменных»

План

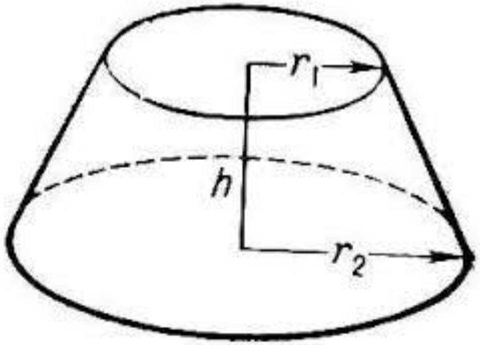
1. Функции многих переменных.
2. Правила дифференцирования функций многих переменных.
3. Частные производные функций многих переменных второго порядка.

Примеры

- **Давление идеального газа**

$$p = \frac{1}{V} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \Rightarrow p = f(V, \nu, T)$$

- **Объём усечённого конуса**



$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2) \Rightarrow V = f(h, r_1, r_2)$$

Случай двух переменных

- ***Определение.*** Если каждой паре **(*x*,*y*)** значений двух независимых переменных ***x*** и ***y*** из некоторой области их изменения *D*, соответствует определенное значение величины ***z*** , то говорят, что ***z*** есть функция двух независимых переменных ***x*** и ***y***, определенная в области *D*:

$$z = f(x, y)$$

Способы задания ФНП

1) **АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ**, или формулой.

ФМП можно задать <u>явно, неявно, параметрически</u>

2) **ТАБЛИЧНОЕ ЗАДАНИЕ.**

При двух аргументах таблица функции имеет два входа

x \ y	y_1	y_2	…	y_n
x_1	$z(x_1;y_1)$	$z(x_1;y_2)$	…	…
x_2	…	…	…	…
…	…	…	…	…
x_m	…	…	…	$z(x_m;y_n)$

3) Функцию двух аргументов можно представить **ГРАФИЧЕСКИ**

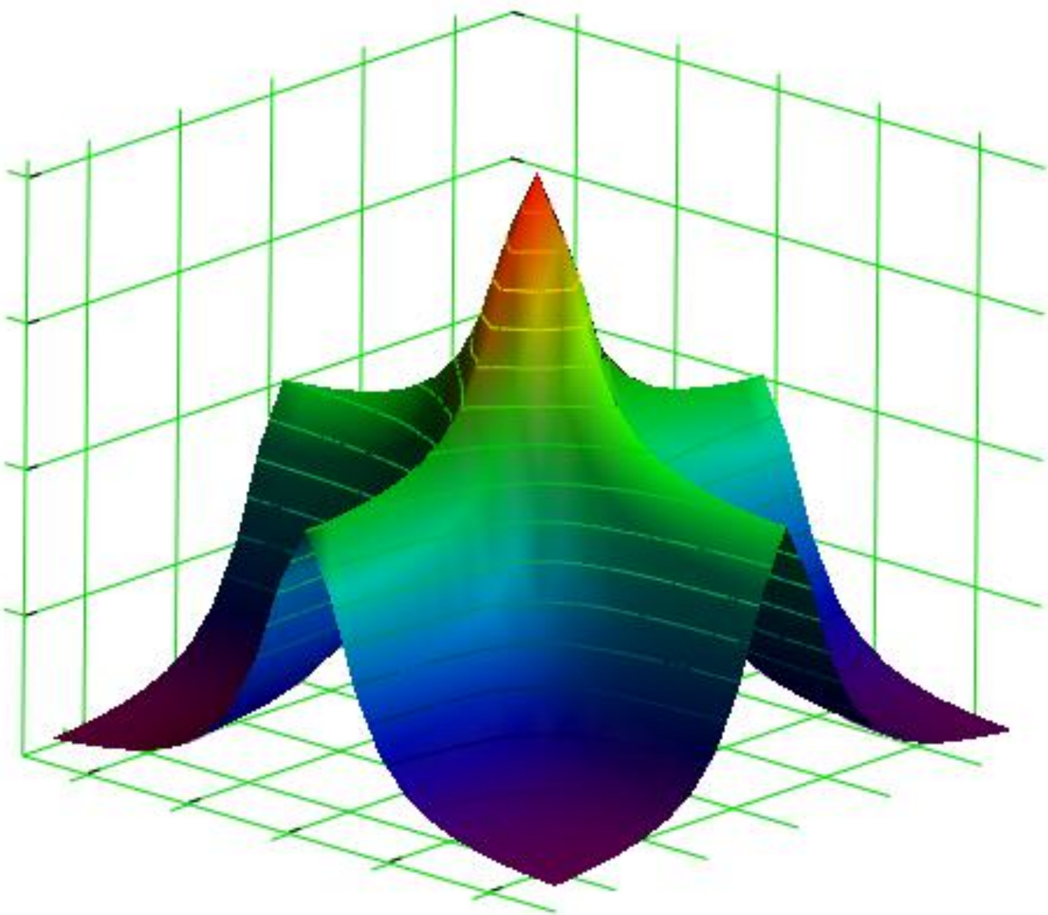


График функции $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$

2. Частные производные. Полный дифференциал

- ЧАСТНЫЕ ПРИРАЩЕНИЯ

только по переменной x или только по переменной y

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x; y)$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x; y)$$

и ПОЛНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y)$$

функции двух переменных $z = f(x, y)$

Определение

- **ЧАСТНОЙ** производной функции $z = f(x, y)$ по аргументу $\boldsymbol{x}$ называется предел отношения *ЧАСТНОГО* приращения функции по аргументу $\boldsymbol{x}$

  к приращению этого аргумента при $\boldsymbol{\Delta x \to 0}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$$

Замечание: аргумент $\boldsymbol{y}$ в данном случае считается ПОСТОЯННОЙ величиной

правила дифференцирования функции нескольких переменных

- ЧАСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ (ДВУХ, ТРЕХ И БОЛЕЕ) ПЕРЕМЕННЫХ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ КАК **ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ИЗ ЭТИХ ПЕРЕМЕННЫХ** ПРИ УСЛОВИИ ПОСТОЯНСТВА ЗНАЧЕНИЙ ОСТАЛЬНЫХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ.
- ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФМП

НАХОДЯТ **ПО ФОРМУЛАМ И ПРАВИЛАМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Пример

- Найти значения частных производных функции

$$u = f(x;y;z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 - 3xy - 2xz$$

в точке $M_0(1;-2;3)$

Решение

1) $$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \left| \begin{matrix} y = const \\ z = const \end{matrix} \right| = \left(2x^2 + y^2 - 3z^2 - 3xy - 2xz\right)'_x =$$

$$= 4x - 3y - 2z$$

$$u'_x(1;-2;3) = 4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = 4$$

$$2)\quad u'_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\left|\begin{matrix}x=const\\ z=const\end{matrix}\right|=\left(2x^2+y^2-3z^2-3xy-2xz\right)'_y=$$

$$=2x-3x$$

$$u'_y(1;-2;3)=2\cdot(-2)-3\cdot 1=-7$$

$$3)\quad u'_z=\frac{\partial u}{\partial x}=\left|\begin{matrix}x=const\\ y=const\end{matrix}\right|=\left(2x^2+y^2-3z^2-3xy-2xz\right)'_z=$$

$$=-6z-2x$$

$$u'_z(1;-2;3)=-6\cdot 3-2\cdot 1=-20$$

Ответ: $u'_x(1;-2;3)=4$ $u'_y(1;-2;3)=-7$

$u'_z(1;-2;3)=-20$

Частные дифференциалы и полный дифференциал функции двух аргументов

- Вспомним! Чтобы найти дифференциал dy функции $y = f(x)$, надо производную этой функции умножить на дифференциал аргумента:

$$dy = y'_x dx$$

- **АНАЛОГИЧНО**. Чтобы найти частный дифференциал $d_x z$ функции $z = f(x, y)$ по переменной ***x*,** надо частную производную этой функции по переменной ***x*** умножить на дифференциал этой переменной:

$$d_x z = z'_x \cdot dx = \frac{\partial z}{\partial x} dx$$

Сумму частных дифференциалов функции

$$z = f(x, y)$$

называют полным дифференциалом и обозначают

$$dz = d_x z + d_y z$$

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Пример

- Найти полный дифференциал функции

$$u = xyz$$

Решение

Согласно определению полный дифференциал заданной функции равен:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Найдём частные производные:

1) $$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \left| \begin{matrix} y = const \\ z = const \end{matrix} \right| = (xyz)'_x = yz$$

2) $$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \left| \begin{matrix} x = const \\ z = const \end{matrix} \right| = (xyz)'_y = xz$$

3) $$u'_z = \frac{\partial u}{\partial z} = \left| \begin{matrix} x = const \\ y = const \end{matrix} \right| = (xyz)'_z = xy$$

Полный дифференциал заданной функции равен:

$$du = yzdx + xzdy + xydz$$

дифференцирование

Частными производными второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называются **частные производные от ее частных производных** первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx}(x,y)$$

- **Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков, например:**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y) = z'''_{xxx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y) = z'''_{xxy}(x, y)$$

- Так называемые ***СМЕШАННЫЕ*** производные, отличающиеся друг от друга лишь ***ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ*** дифференцирования, ***РАВНЫ МЕЖДУ СОБОЙ***, если они непрерывны, например:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$$

Дифференциал функции второго порядка

Дифференциалом второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от ее полного дифференциала, т.е. $d^2 z = d(dz)$

Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то дифференциал второго порядка вычисляется по формуле

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$