Лекция №3

Тема: «Дифференцирование функции многих переменных»

План

1. Экстремум функций многих переменных
2. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции
3. Производная по направлению. Градиент функции.

Словарик

Экстре́мум (лат. *extremum* — крайний) в математике — *максимальное* или *минимальное* значение функции на заданном множестве

1. Экстремумы функций нескольких переменных

Максимум или минимум функции $z = f(x, y)$ называется ее *экстремумом.* Точка M_0, в которой функция имеет экстремум, называется *точкой экстремума*.

Если дифференцируемая функция достигает экстремума в точке M_0, то ее ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ЭТОЙ ТОЧКЕ РАВНЫ НУЛЮ (***необходимое условие экстремума***):

$$z'_x(x_0; y_0) = 0, \qquad z'_y(x_0; y_0) = 0$$

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются *стационарными точками.*

Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пусть M_0 – стационарная точка функции $z = f(x, y)$ её частные производные второго порядка в этой точке равны

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2}, z''_{xy} = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y}, z''_{yy} = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2}$$

Составим дискриминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2$$

- Тогда (***ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НАЛИЧИЯ ИЛИ ОТСУТСТВИЯ ЭКСТРЕМУМА***)

Если $\Delta > 0,$ то функция **имеет** в точке **экстремум**,

а именно **МАКСИМУМ** при $z''_{xx} < 0 (или\ \ z''_{yy} < 0)$

и **МИНИМУМ** при $z''_{xx} > 0 (или\ \ z''_{yy} > 0)$

Если $\Delta < 0,$ то в точке экстремума нет!

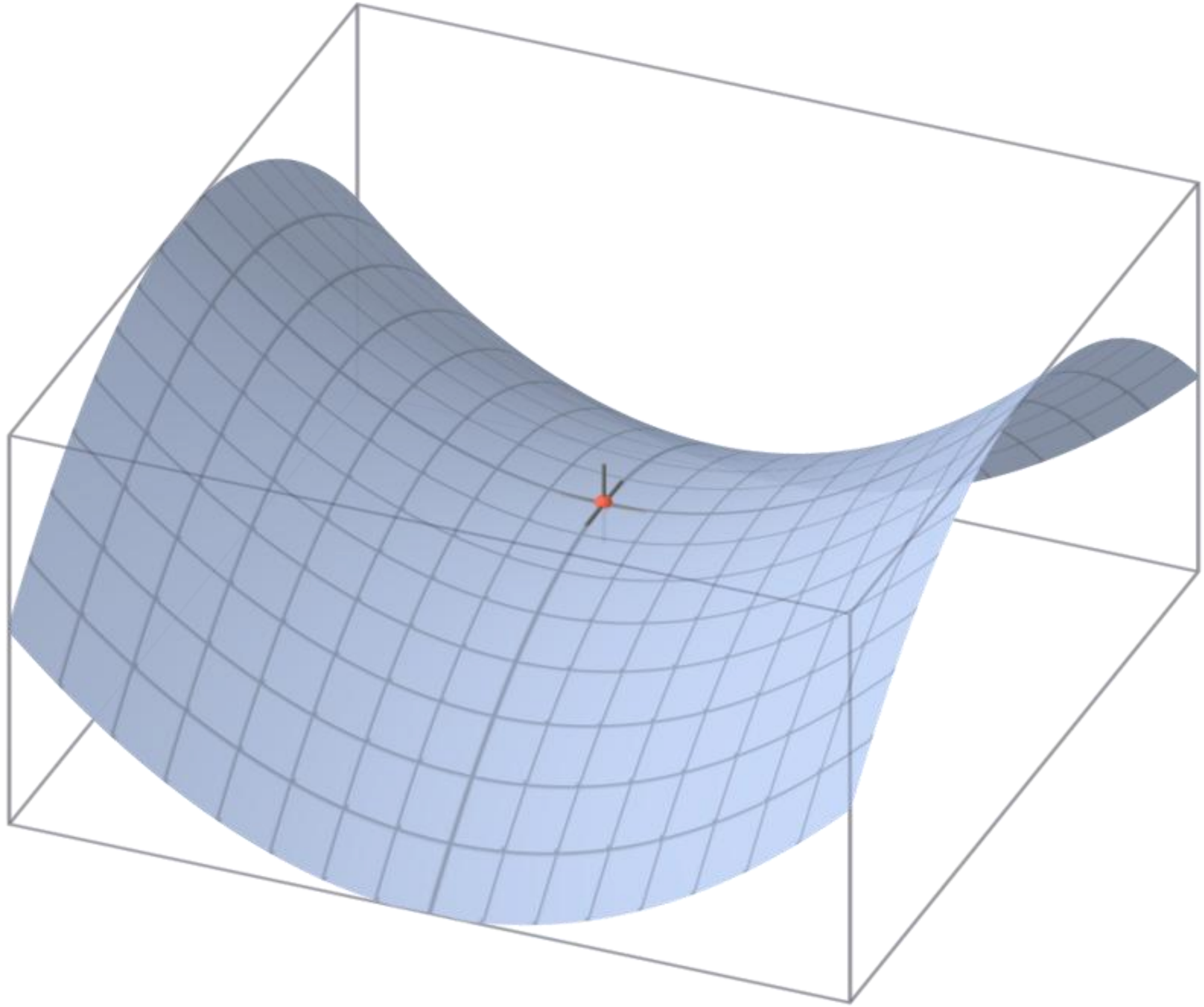
Если $\Delta = 0,$ то требуется дальнейшее исследование (СОМНИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ)

Замечание

- **СЕДЛОВАЯ точка** в математическом анализе — такая точка из области определения функции, которая является стационарной для данной функции, однако не является её локальным экстремумом.
- В такой точке, если рассматривается функция двух переменных, образованная графиком поверхность обычно напоминает по форме **СЕДЛО** или **ГОРНЫЙ ПЕРЕВАЛ**— выпуклая в одном направлении и вогнутая в другом.
- Например, **СЕДЛОВАЯ** точка функции

$$z = x^2 - y^2$$

на рисунке обозначена красным



2. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

- **Определение:** условным экстремумом функции двух переменных $z = f(x, y)$ называют ее экстремум при условии, что переменные X и Y связаны уравнением

  $\varphi(x, y) = 0$, называемым уравнением связи.

- Нахождение условного экстремума сводится к исследованию на экстремум функции Лагранжа:

$$u = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ - неопределённый постоянный множитель (*множитель Лагранжа*).

- **Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид:**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

- ***Замечание.*** Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **МЕТОДОМ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА.**

Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

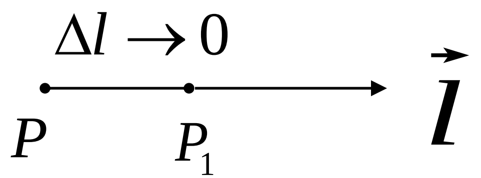
- ПРАВИЛО ИССЛЕДОВАНИЯ

I. Найти стационарные точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках
II. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области
III. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее

3. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

- **Производной функции** u(P) **в точке** P **по направлению** $\bar{l}$ называется предел (если он существует) отношения приращения Δu функции u(P) при смещении точки в направлении вектора $\bar{l}$ к величине этого смещения $\boldsymbol{\Delta l = PP_1}$, когда последнее стремиться к нулю и обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial l}$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{d \to 0} \frac{u(P_1) - u(P)}{|PP_1|}$$



$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Если $u = u(x, y, z)$ (т.е. функция рассматривается в прямоугольной системе координат), то:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \quad ,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{l}$

Направляющие косинусы

- **Направляющие косинусы** вектора (в пространстве) – это косинусы углов, которые вектор образует с положительными полуосями координат. Направляющие косинусы однозначно задают направление вектора. В общем случае для вектора с координатами (x; y; z) направляющие косинусы равны:
- Сумма квадратов направляющих косинусов равна 1.

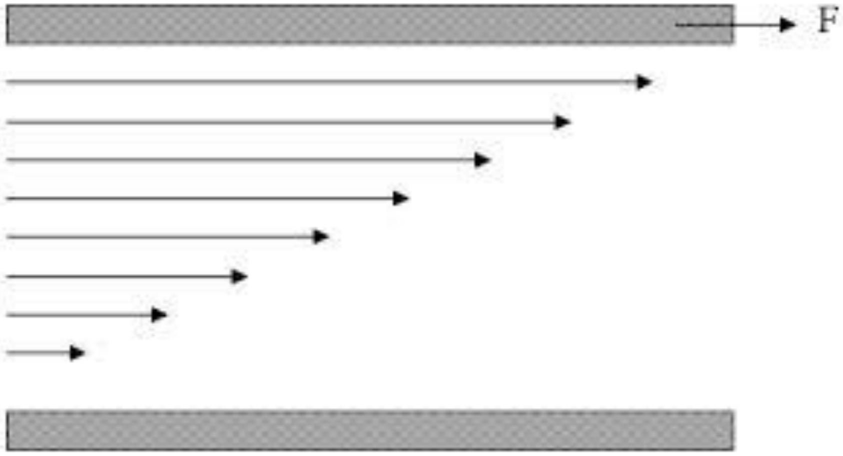
$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{l}|} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{l}|} \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{l}|} \end{cases}$$

выводы

- Частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$ характеризуют скорость изменения функции в направлении осей координат.
- Производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ характеризует скорость изменения функции $u = u(x, y, z)$ в точке P по направлению вектора $\vec{l}$.
- Если $\dfrac{\partial u}{\partial l} > 0$ в т.P по данному направлению $\vec{l}$, то функция в этом направлении возрастает, и, наоборот.

- **Градиент** (от лат. *gradiens*, род. падеж *gradientis* — шагающий) — характеристика, показывающая направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой.



$$F = -\eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dy}$$

- Профиль векторов скоростей при ламинарном течении жидкости

ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор $\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ называется $grad u$ **градиентом** скалярной функции (поля) $u=u(P)$ в точке P и обозначается:

$$grad u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

ПРИМЕЧАНИЕ: градиент можно рассматривать как некоторое векторное поле

Например

- *Напряжённость в какой-либо точке электрического поля равна градиенту потенциала в этой точке, взятому с обратным знаком*:

$$\overline{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{k} \right)$$

$$\overline{E} = -grad\varphi$$

- Знак «минус» указывает, что напряженность **E** направлена в сторону убывания потенциала.

- Величиной градиента называют скалярное поле

$$|grad u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

формула связи производной по направлению и градиента

$$пр_{\vec{l}}\, grad u = \frac{\partial u}{\partial l}$$