# Лекция №4

## Тема: «Двойные интегралы – 1 часть»

06.03.2022

**План**

**1. Определение и геометрический смысл**

**2. Свойства двойного интеграла**

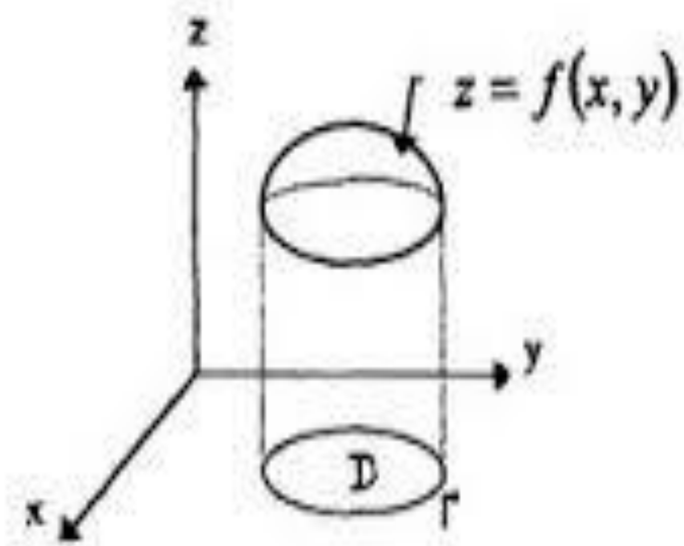
**3. Вычисление двойного интеграла в ДСК**

**3.1 Вычисление двойного интеграла в полярных координатах**

**4. Некоторые приложения двойного интеграла в геометрии и физике**

## 1.Определение и геометрический смысл

Тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x, y)$ , снизу плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси $z$, а направляющей служит граница области $D$, называется криволинейным цилиндром.

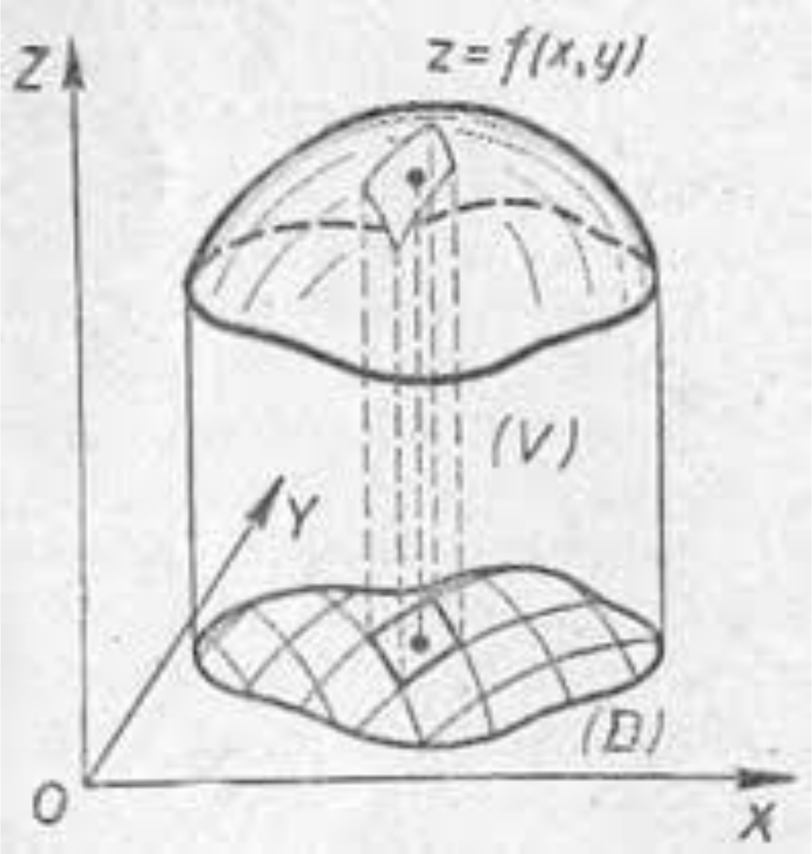


## К понятию двойного интеграла приводит задача об объёме криволинейного цилиндра, которая решается методом разбиений

1. Разобьём область ***D*** **какими-нибудь линиями** на ***n*** частей (площадок) $\Delta S_i$
2. В каждой из площадок возьмём точку $\mathbf{P_i(x,y)}$ и вычислим значения функции в этих точках: $f(P_i)$
3. Составим сумму произведений

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta S_i \quad ,$$

которая называется ***интегральной***



4. При различных способах разбиения области $D$ получим произвольную последовательность интегральных сумм:

$$V_{n1}, V_{n2}, V_{n3}, \ldots, V_{nk}, \ldots$$

**Теорема:** если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $D$, то существует предел последовательности $V_{nk}$ интегральных сумм, если максимальный диаметр площадок стремится к 0, а число разбиений стремится к бесконечности.

Этот предел не зависит ни от способов разбиения области $D$ на площадки, ни от выбора точки внутри площадки и ***называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области $D$ и обозначается:***

$$\lim_{\substack{\dim \Delta S_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta S_i = \iint_D f(x,y)\,ds$$

# Двойной интеграл в ДСК

$$I = \iint\limits_D f(x, y)ds = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$$

$f(x, y) - \textit{функция, интегрируемая в области } D$

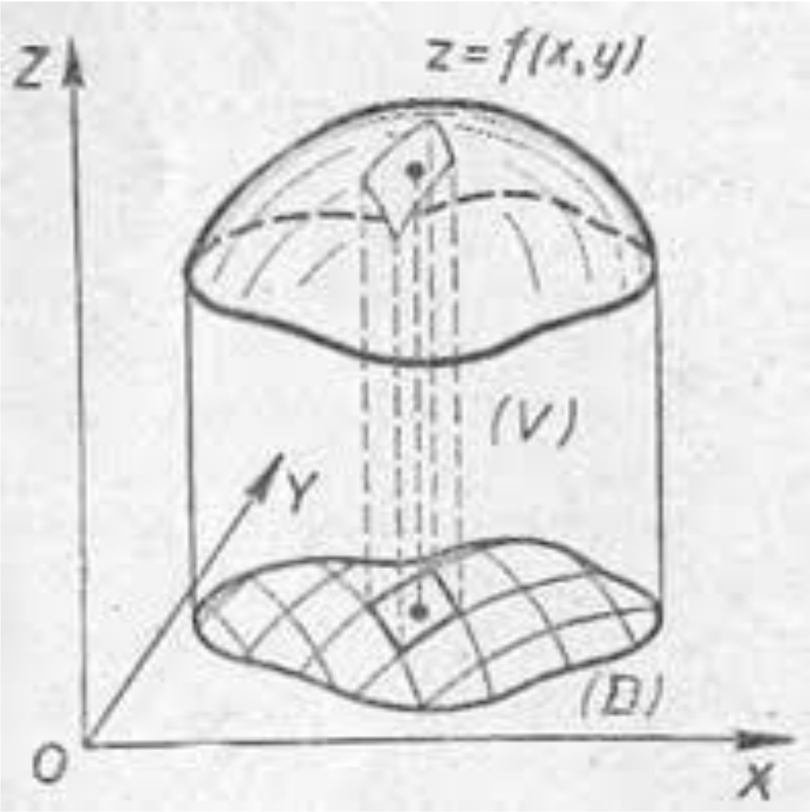
$D - \textit{область интегрирования}$

$x, y - \textit{переменные интегрирования}$

$ds = dxdy - \textit{элемент площади в ДСК}$

# Геометрический смысл:

- 1. **Двойной интеграл** от непрерывной неотрицательной функции $z = f(x, y)$ **равен объёму криволинейного цилиндра:**




$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$$

# Геометрический смысл:

- 2. ***Если*** положить, что ***подынтегральная функция***

$$f(x, y) = 1$$

всюду в области интегрирования ***D***, то ***двойной интеграл будет численно равен площади области интегрирования:***

$$S = \iint_D dxdy$$

# Свойства *двойного* интеграла

$$1. \iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$2. \iint\limits_D (f(x,y) \pm g(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

- 3. Если область интегрирования ***D*** является объединением областей ***D1*** ***и*** ***D2*** :
- ***D = D1 + D2***

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)dxdy$$

$$4.\quad \textit{Теорема о среднем}$$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = f(x_0; y_0)\cdot S$$

$$S - \textit{площадь фигуры } D$$

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0; y_0) = \frac{1}{S}\iint_D f(x; y)$$

- Здесь *f(x0, y0)* ***– среднее значение функции в области*** *D*

- **Область интегрирования – это область *D, по которой вычисляется двойной интеграл от заданной функции* $f(x,y)$.**
- ***Различают два вида простой области интегрирования***

- **1) область сверху и снизу ограничена непрерывными линиями**

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ **, а слева и справа прямыми** $x = a$ и $x = b$

$$D = \{(x; y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

**2) область слева и справа ограничена непрерывными линиями**

**,** $x_1(y) \quad и \quad x_2(y)$

**а сверху и снизу прямыми**

$$y = d \quad и \quad y = c$$

$$D = \{(x; y) : c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

- **На рисунках показаны эти две простые  области интегрирования:**

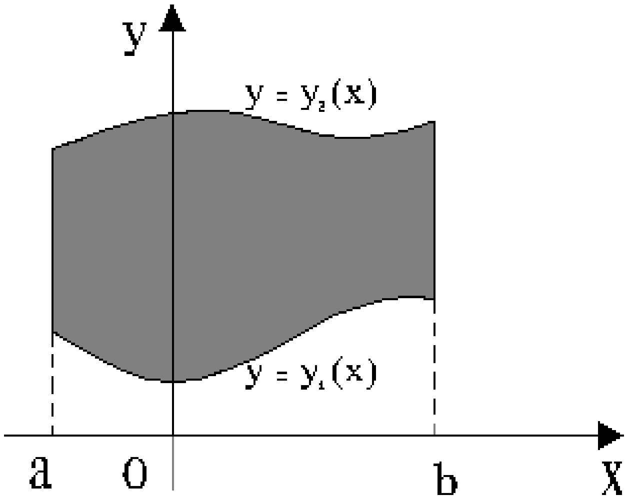



рис.2

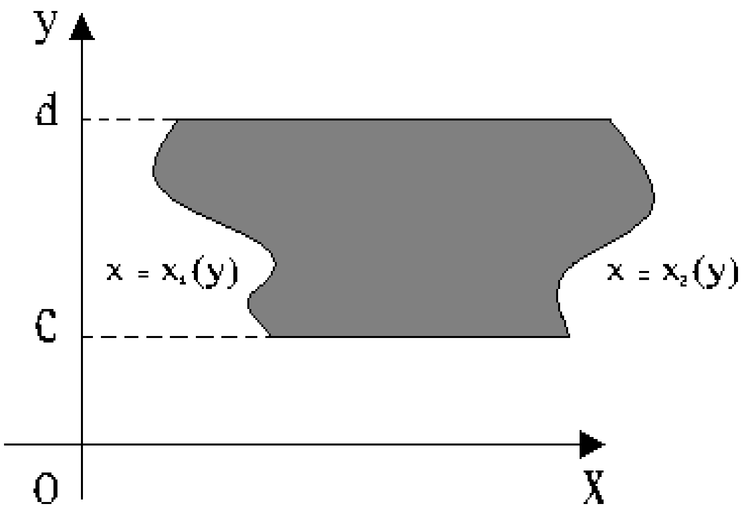



рис.3