Лекция №5

Тема: «Двойные интегралы - 2 часть.»

13.03.2022

План

1. **Вычисление двойного интеграла в ДСК.**
2. **Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.**

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА СВОДИТСЯ К ПОВТОРНОМУ ИЛИ ДВУКРАТНОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ

1) Если функция $z = f(x;y)$ **определена и непрерывна на множестве**

$$D = \{(x;y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

то получаем

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

$$I=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy$$

в правой части формулы

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy-\textit{внутренний интеграл}$$

$$\int\limits_{a}^{b}dx-\textit{внешний интеграл}$$

2) Если функция $z = f(x;y)$ определена и непрерывна на множестве

$$D = \{(x;y) : c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

то получаем

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

в правой части формулы

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx - \text{внутренний интеграл}$$

$$\int_c^d dy - \text{внешний интеграл}$$

Замечание

1) границы внешнего интеграла всегда постоянны
2) если контур области интегрирования ***D*** имеет сложный вид, то её разбивают на конечное число простых областей: D=D**1**+D**2** и при вычислении интеграла используют свойство 3:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

3) если область интегрирования представляет собой прямоугольник, то $I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$ вычисляется по формулам

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

или

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

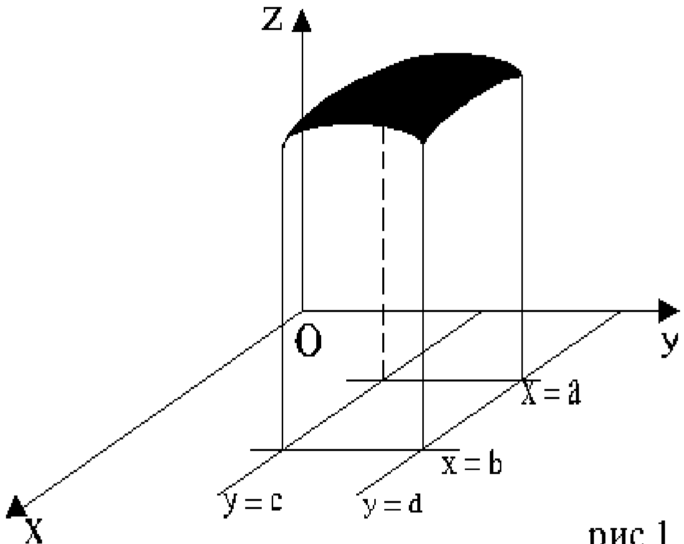


рис.1

4) если область интегрирования ограничена четырьмя гладкими кривыми:

$$D = \{(x; y) : x_1(y) \le x \le x_2(y), y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

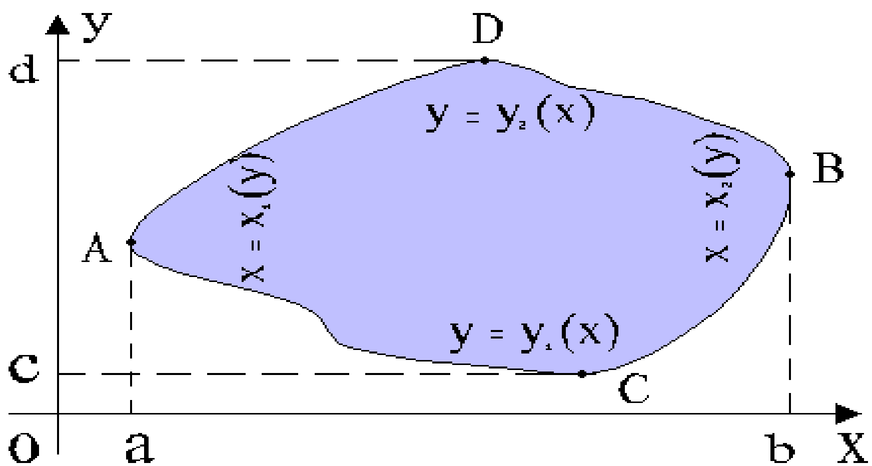


рис.4

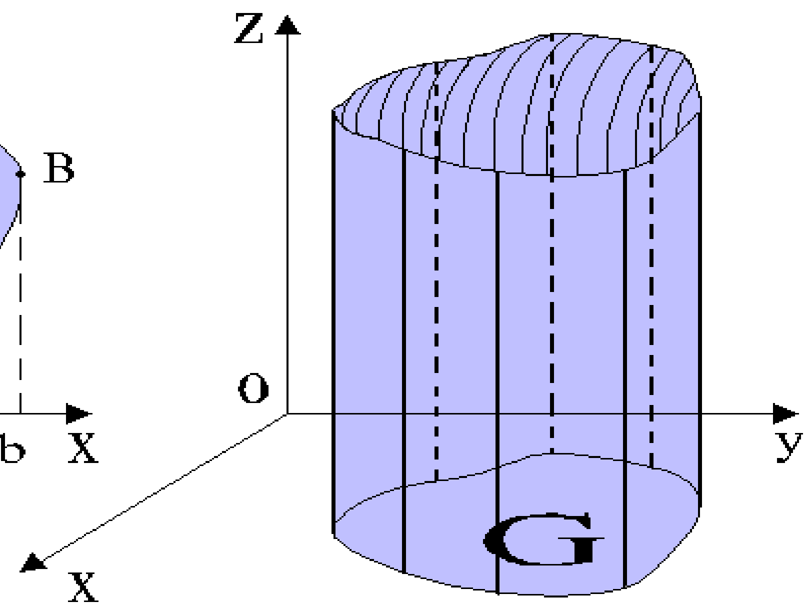


рис.5

то для вычисления двойного интеграла можно использовать как первую формулу, так и вторую :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

- **Эта формула используется для изменения порядка интегрирования при вычислении двойного интеграла**

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить повторный интеграл

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x (x + y)dy$$

Решение

1. Вычислим внутренний интеграл

$$\int_0^x (x + y)dy = xy\Big|_0^x + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^x = x^2 + \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}x^2$$

Здесь $\frac{3}{2}x^2$ - подынтегральная функция для внешнего интеграла

2) Вычислим внешний интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ответ:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x (x + y) dy = \frac{1}{2}$$

Задача 2. Расставить пределы интегрирования в интеграле

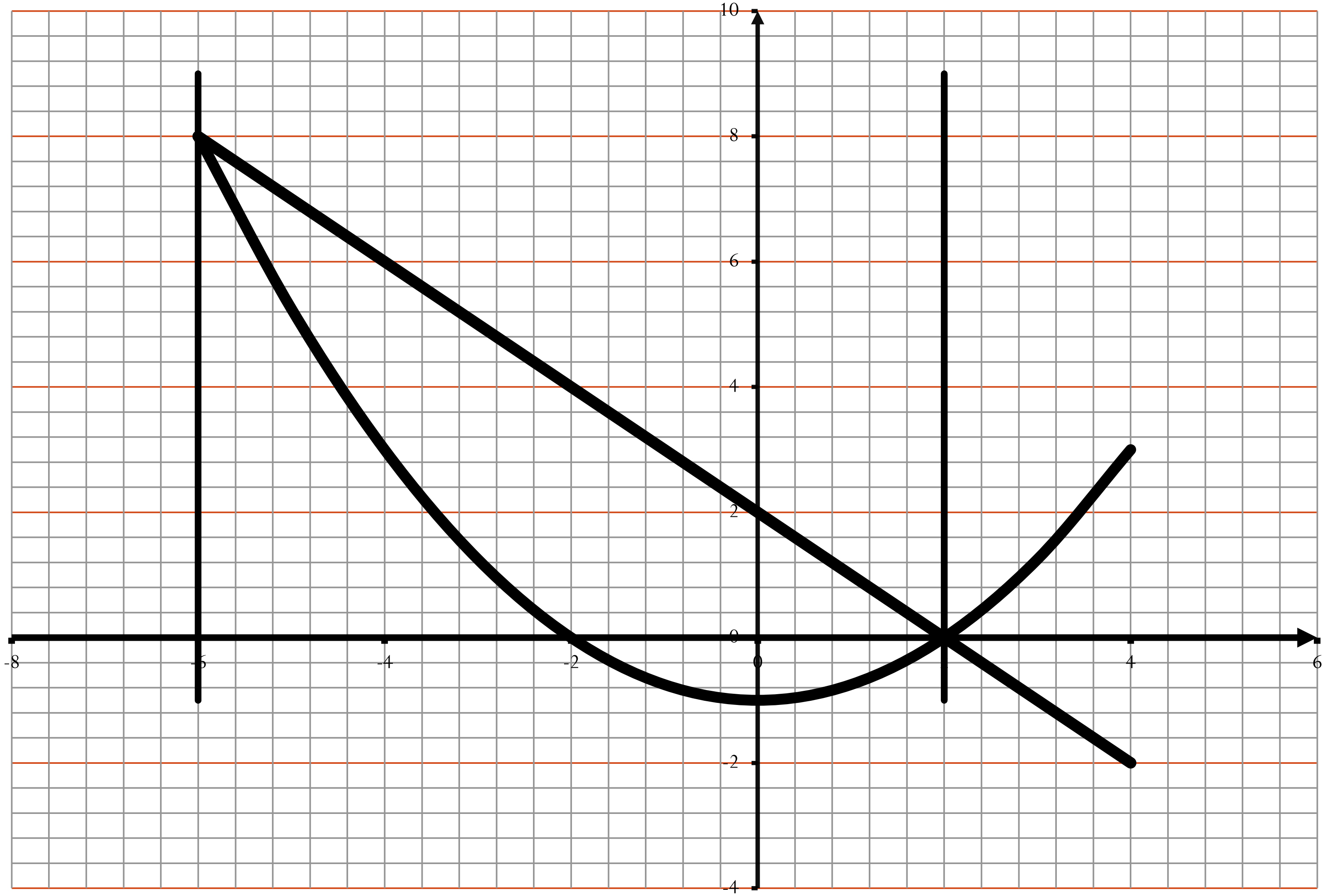
$$I = \iint_D f(x, y)\,dxdy$$

Область D ограничена линиями:

$$D = \begin{cases} x + y = 2 \\ y = \dfrac{x^2}{4} - 1 \end{cases}$$

- Построим область интегрирования

Область интегрирования



Вывод

- Область интегрирования представляет собой простую область первого типа:

 область сверху и снизу ограничена непрерывными линиями $y = 2 - x$ *и* $y = \frac{x^2}{4} - 1$, а слева и справа прямыми $x = -6$ *и* $x = 2$

Расставим пределы интегрирования во внутреннем и внешнем интегралах и запишем ответ:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dx$$

Задача 3. В интеграле

$$I=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_0^{4-x} f(x,y)dy$$

изменить порядок интегрирования

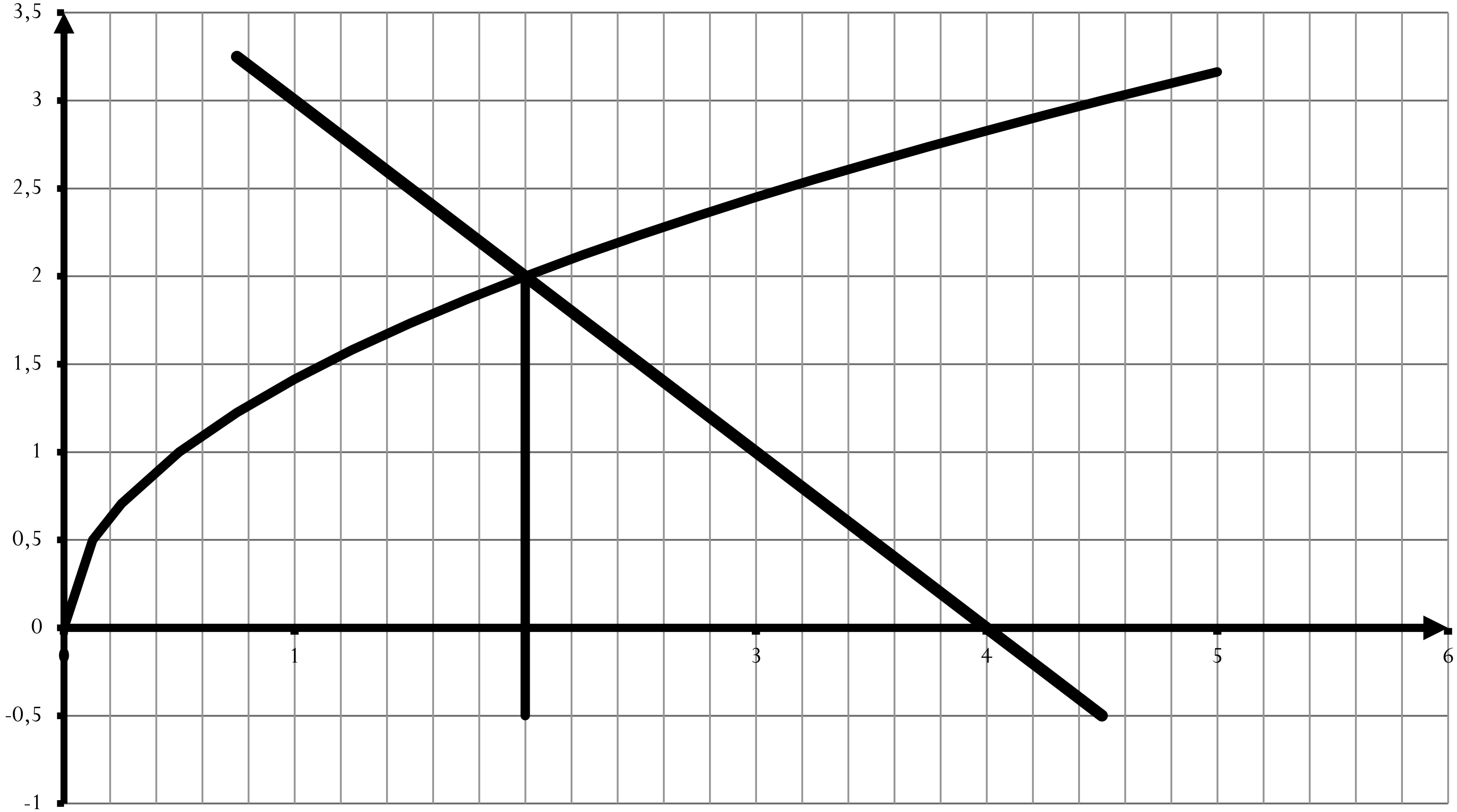
Решение

Построим область интегрирования $D=D_1+D_2$

Согласно условию получаем:

$$D_1=\begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ y=0 \\ y=\sqrt{2x} \end{cases} \qquad D_2=\begin{cases} x=2 \\ x=4 \\ y=0 \\ y=4-x \end{cases}$$

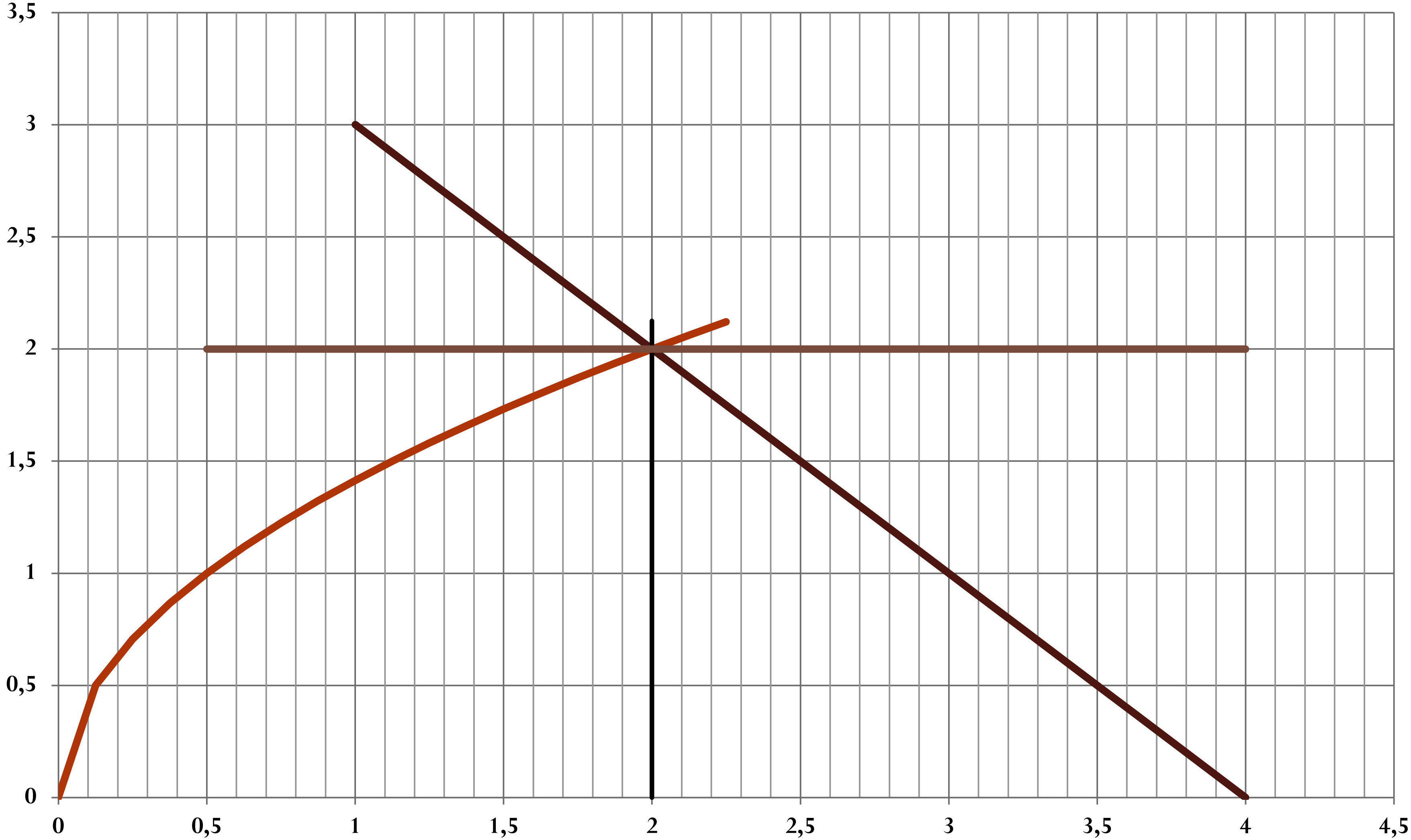
Построим область интегрирования



Анализ: область интегрирования есть сумма **двух** простых областей первого типа.
Можно данную область представить как ***одну*** простую область второго типа:
область сверху и снизу ограничена прямыми ***y=2*** **и** ***y=0*** **,**
а слева и справа непрерывными линиями

$$x = \frac{y^2}{2} \qquad x = 4 - y$$

Область интегрирования



$$D=\begin{cases} y=0 \\ y=2 \\ x=\dfrac{y^2}{4} \\ x=4-y \end{cases} \Rightarrow I=\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} f(x,y)dx$$

- **Ответ:**

$$I=\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy+\int_2^4 dx \int_0^{4-x} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} f(x,y)dx$$

2. Замена переменной в двойном интеграле

Замена переменной в интеграле $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

состоит в переходе от переменных $(x$ и $y)$ к новым переменным $(u$ и $v)$, которые связаны со старыми соотношениями:

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad (u,v) \in D$$

Если выполняются условия:

1°. ***Отображение взаимно однозначно.***

2°. ***Функции непрерывно - дифференцируемы в области D.***

3°. *Якобиан отображения не равен 0:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

то имеет место формула:

$$I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_D f(x(u, v); y(u, v))\left|\Delta\right|dudv$$

Рассмотрим полярные координаты (r, φ) .
Связь с декартовыми выражается формулами:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0 \le r < +\infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Для случая полярных координат определитель преобразования (или ***якобиан***) равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Если область интегрирования имее

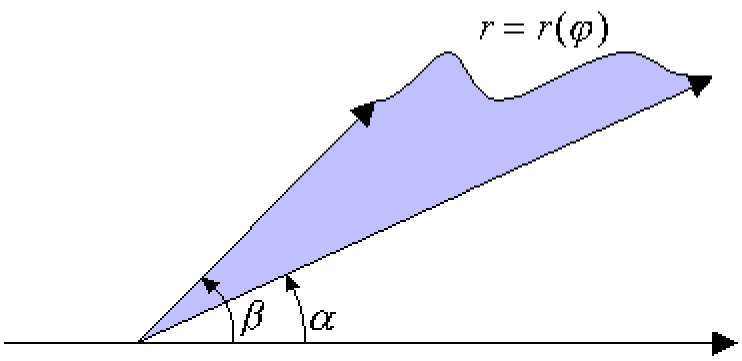


рис.10

то $D = \{(r;\varphi) : 0 \le r \le r(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta\}$

- **Вычисление двойного интеграла в полярных координатах выполняется по формуле:**

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

Задача 4. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy, \text{если} \quad D = \left\{x^2 + y^2 \le \pi^2\right\}$$

- Решение

- Область интегрирования представляет собой круг с центром в начале координат и радиусом π.
- Вычисление данного интеграла удобнее выполнить в полярных координатах

Формулы перехода имеют вид:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ dxdy = r\,dr\,d\varphi \\ 0 \le r < \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

- Исходный интеграл преобразуется к виду:

$$I=\iint\limits_D\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dxdy=\iint\limits_D\left(1-\frac{r^2\cdot\sin^2\varphi}{r^2\cdot\cos^2\varphi}\right)rdrd\varphi=\iint\limits_D\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)rdrd\varphi$$

- Расставим пределы интегрирования:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)rdr$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)rdr=\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)\cdot\int_0^{\pi}rdr=$$

$$=\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)\cdot\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}\cdot\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)$$

- Замечание: «скобка» является константой и её можно преобразовать к виду:

$$\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)=2-\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

Итак, найденная первообразная есть подынтегральная функция для внешнего интеграла и она имеет вид:

$$f(\varphi) = \frac{\pi^2}{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)$$

- Вычисляем интеграл: $I = \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2}{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi$

$$I = \frac{\pi^2}{2} \int_0^{2\pi} 2 d\varphi - \frac{\pi^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = 2 \cdot \pi^3$$

Ответ:

$$I=\iint\limits_{D}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dxdy=2\cdot\pi^3,\textit{если}\quad D=\left\{x^2+y^2\le\pi^2\right\}$$