Лекция

Тема: «Кратные интегралы: тройной интеграл»

План

1. Определение и физический смысл

2. Свойства тройного интеграла

3. Вычисление тройного интеграла в ДКС

3.1 Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

3.2 Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

4. Некоторые приложения тройного интеграла в геометрии и физике

- **Нахождении массы тела переменной плотности приводит к понятию тройного интеграла**

1. Определение и физический смысл

- Пусть в пространстве задана некоторая область ***V***, ограниченная замкнутой поверхностью ***S***. В этой области определена функция $\boldsymbol{f(x,y,z)}$.
- Разобьем область ***V*** произвольным образом на ***n*** областей $\mathbf{\Delta V_i}$. Внутри каждой из них выберем точку $\mathbf{P_i}$ и обозначим через $\boldsymbol{f}\,(\mathbf{P_i})$ значение функции $\boldsymbol{f(x,y,z)}$.

- Составим интегральную сумму $\boldsymbol{\Sigma f(P_i)\cdot \Delta V_i}$ и будем неограниченно увеличивать число малых областей так, чтобы наибольший диаметр $\boldsymbol{diam\ \Delta V_i}$.
- Если $\boldsymbol{f(x,y,z)}$ непрерывна, то будет существовать предел I интегральных сумм вида:

$$I = \lim_{\substack{diam\Delta V_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta V_i$$

- Этот предел называется тройным интегралом и обозначается символом:

$$I = \iiint_V f(P)dV = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

x, y, z – *переменные интегрирования*

$f(x, y, z)$ – *подынтегральная функция*

$dxdydz$ – *элемент объёма в ДСК*

V – *область интегрирования*

Физический смысл тройного интеграла

- Если $f(x,y,z)=\gamma(x,y,z)$ считать объёмной плотностью распределения вещества в области $\boldsymbol{V}$, то тройной интеграл даёт массу всего вещества, заключенного в области $\boldsymbol{V}$:

$$M=\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz$$

2. Свойства тройного интеграла

- Тройные интегралы имеют те же свойства, что и двойные интегралы (линейность, аддитивность, формулы среднего значения и т.д.)
- 1.
- 2.

$$\iiint\limits_V k\cdot f(x,y,z)dV = k\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$$

$$\iiint\limits_V \left(f_1(x,y,z)\pm f_2(x,y,z)\right)dV = \iiint\limits_V f_1(x,y,z)dV \pm \iiint\limits_V f_2(x,y,z)dV$$

- 3. Если всюду в области V имеет место неравенство $f(x,y,z)>0$, то и

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV > 0$$

- 4. Свойство аддитивности.

Если область интегрирования

$$V = \sum_{i=1}^{k} V_i = V_1 + V_2 + \ldots + V_k \text{ ,}$$

тогда

$$\iiint_V = \iiint_{V_1} + \iiint_{V_2} + \ldots + \iiint_{V_k}$$

- 5. Тройной интеграл от непрерывной функции *f(x,y,z)* по области V равен произведению объема V этой области на значение функции в некоторой точке P области V:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = f(P)\cdot V$$

3. Вычисление тройного интеграла в ДСК

- В двойном интеграле область интегрирования представляет собой плоскую фигуру, в случае тройного интеграла – пространственное тело.

К области интегрирования предъявляют особые условия – **она должна быть правильной трёхмерной областью.**

Область интегрирования

Определение: область V называется **правильной трёхмерной областью,**
если она удовлетворяет следующим свойствам:
1) Всякая прямая, параллельная оси Z, проведённая через внутреннюю точку области пересекает поверхность S в двух точках

2) Вся область V проектируется на плоскость Oxy *в правильную двумерную область D*

3) Всякая часть области V, отсечённая плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей (oxy, oxz, oyz) также обладает свойствами 1) и 2)

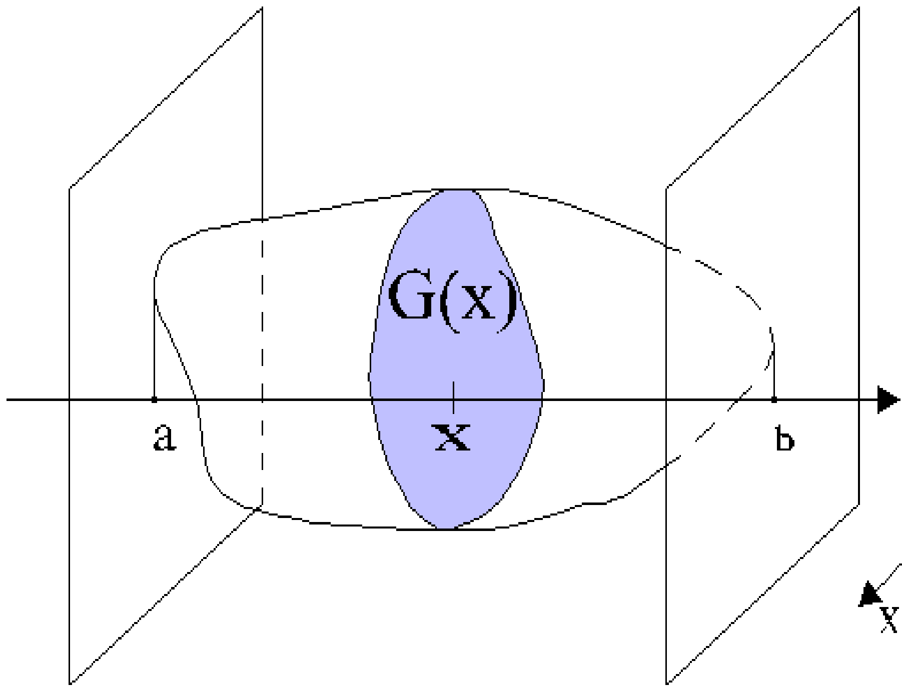


рис.1

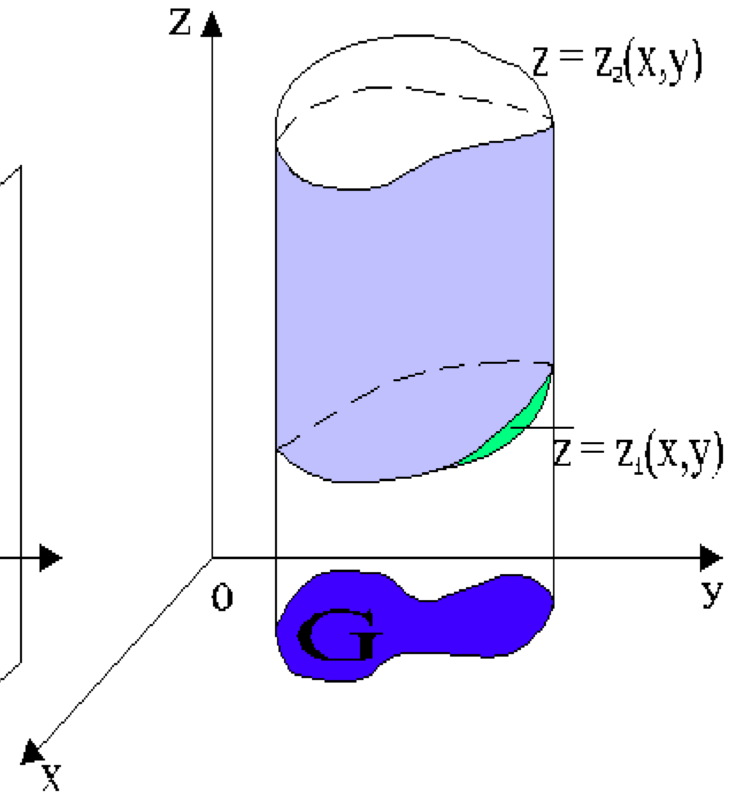


рис.2

Теорема:

- Тройной интеграл от непрерывной функции *f(x,y,z)* по области правильной V равен трёхкратному интегралу по той же области:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Замечание

- 1. Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению трёхкратного.
- 2. Если подынтегральная функция $f(x, y, z) \equiv 1$ то тройной интеграл по области V выражает объём этой области:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz$$

- Пусть правильная область V ограничена снизу и сверху поверхностями $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ и проектируется на плоскость Oxy в правильную область D, внутри которой $\boldsymbol{x}$ изменяется в пределах от $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$, ограниченную кривыми $y_1(x)$ и $y_2(x)$

Правило вычисления тройного интеграла

Для того чтобы вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, необходимо:

1) вычислить «внутренний» определённый интеграл

$$\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

считая x, y постоянными.

- Верхней границей интегрирования является аппликата точки входа $z_2(x,y)$, а нижней – $z_1(x,y)$ аппликата точки выхода
- Результат этого вычисления есть функция двух переменных x, y.
- *Обозначим её как* $g(x,y)$

2) Вычислить «средний» определённый интеграл, считая x *постоянной величиной:*

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} g(x,y)dy$$

- Результат этого вычисления есть функция одной переменной x
- *Обозначим её как* $u(x)$

3) Вычислить «внешний» определённый интеграл, который и будет численно равен тройному интегралу:

$$I = \int_a^b u(x)dx$$

Пример 1. Вычислить трёхкратный интеграл

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^2}$$

1. Вычислим внутренний интеграл $\displaystyle\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^2}$

$$\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^2}=\left|\int\frac{dx}{x^2}\right|=-\frac{1}{1+x+y+z}\Bigg|_0^{1-x-y}=$$

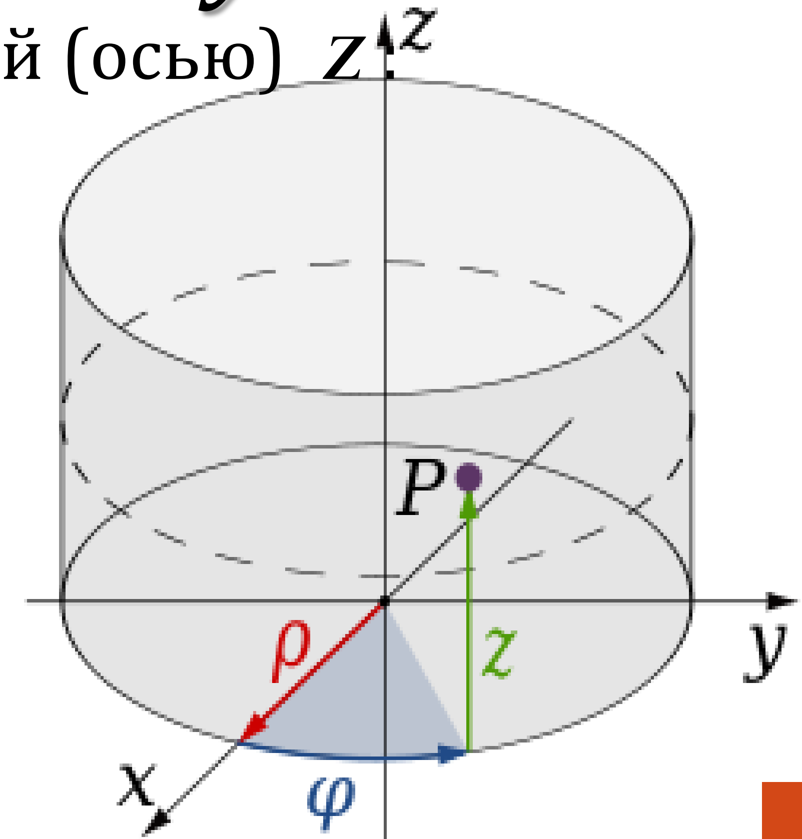
$$=-\left(\frac{1}{1+x+y+1-x-y}-\frac{1}{1+x+y}\right)=\frac{1}{1+x+y}-\frac{1}{2}$$

2. Вычислим средний интеграл $\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{1+x+y}-\frac{1}{2}\right)dy$

- *Цилиндрические координаты* (r, φ, Z) представляют соединение полярных координат в плоскости $x\,0\,y$ с обычной декартовой аппликатой (осью) z:

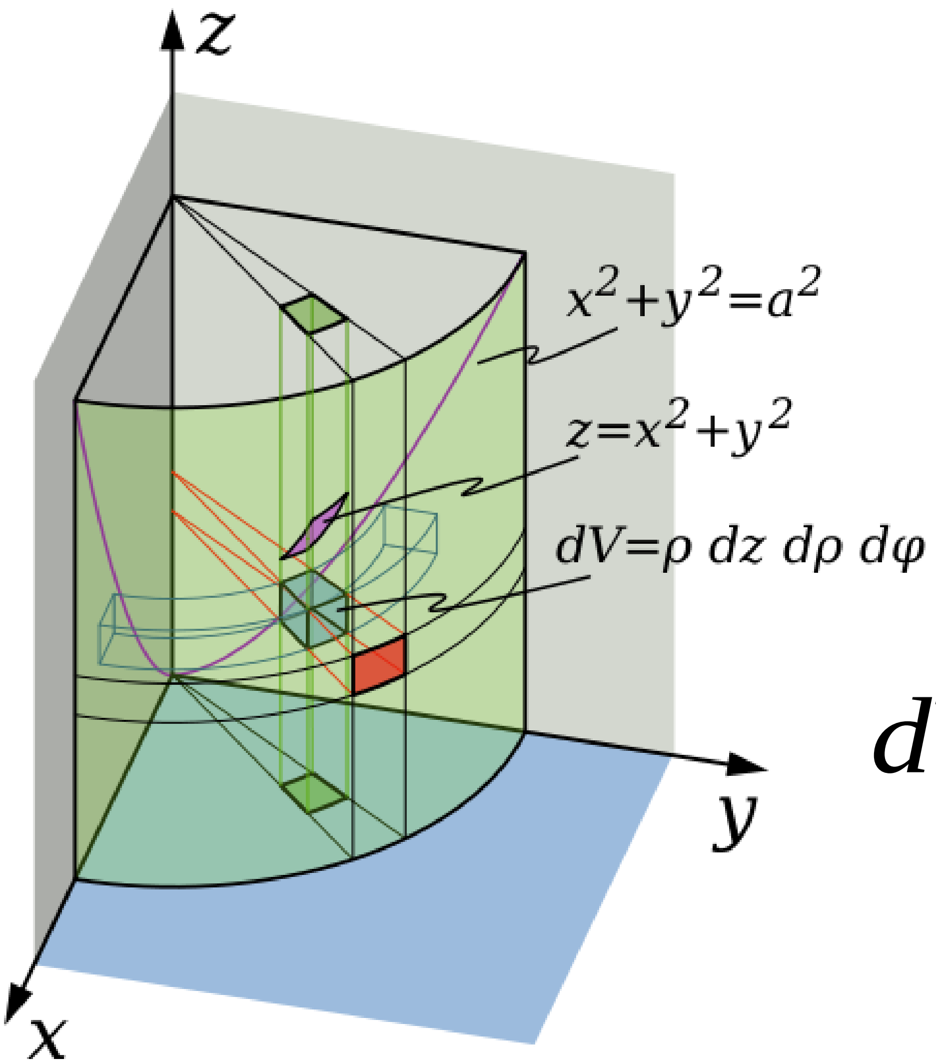
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \in [0;+\infty) \\ \varphi \in [0;2\pi] \\ Z \in (-\infty;+\infty) \end{cases}$$



27.03.2022

Объем в цилиндрических координатах



- Элементарный объём в цилиндрических координатах равен:

$$dV = rdr \cdot d\varphi \cdot dz$$

- **Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах выполняется по формуле:**

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_T f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz =$$

- Тройку сферических координат (r, φ, θ) можно перевести в декартову систему следующими преобразованиями:

- $$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \in [0;+\infty) \\ \varphi \in [0;2\pi] \\ \theta \in [0;\pi] \end{cases}$$

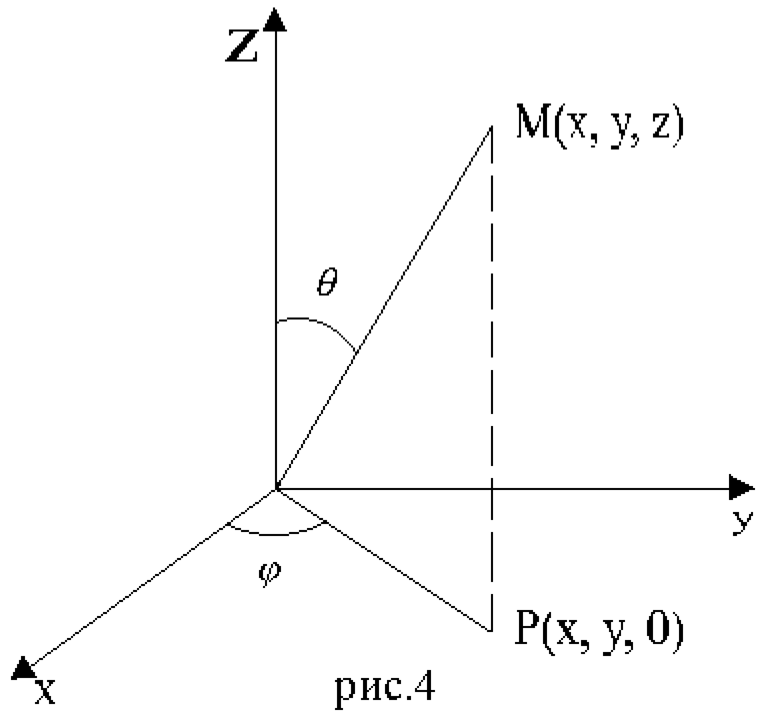
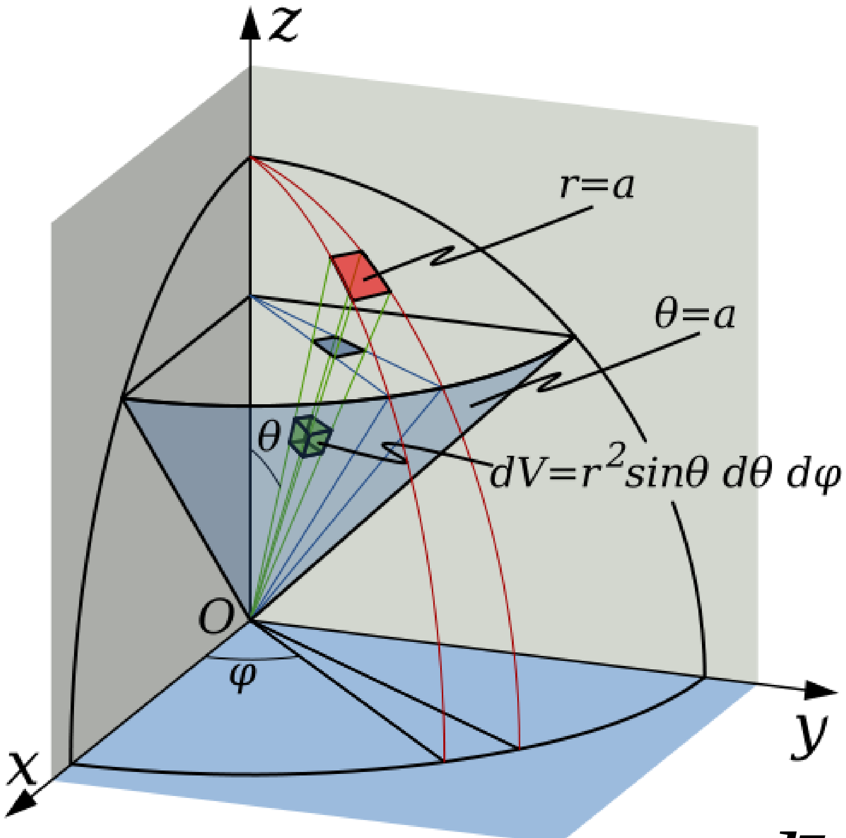


рис.4

Объем в сферических координатах



- Элементарный объём в цилиндрических координатах равен:

$$dV = r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

- **Вычисление тройного интеграла в сферических координатах выполняется по формуле:**

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_T f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta$$