Лекция 8

Тема: «Вычисление тройных интегралов».

Задача 1.

Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V x^2 yz dx dy dz, V: -1 \le x \le 2, 0 \le y \le 3, 2 \le z \le 3$

Решение. Расставим пределы интегрирования и вычислим:

$$\iiint\limits_V x^2 yz dx dy dz = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{2}^{3} x^2 yz dz = \int\limits_{-1}^{2} x^2 dx \cdot \int\limits_{0}^{3} y dy \cdot \int\limits_{2}^{3} z dz =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{0}^{3} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{2}^{3} = \frac{2^3 - (-1)^3}{3} \frac{3^2}{2} \frac{3^2 - 2^2}{2} = \frac{135}{4}.$$

Ответ: 135/4.

Задача 2.

Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz, \qquad V:\ x^2+y^2+z^2=R^2, \qquad z\geq 0, \qquad x>0$$

Решение.

Перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Якобиан такой замены $J = r^2\sin\theta$, то есть $dxdydz = r^2\sin\theta\ drd\varphi d\theta$.

Уравнение $x^2+y^2+z^2=R^2$ примет вид $r=R$, поэтому $0\leq r\leq R$. Из условия $z\geq 0$ получим $\cos\theta\geq 0$, откуда $0\leq\theta\leq\pi/2$. Из условия $x>0$ получим $\cos\varphi\sin\theta>0$. Так как $0\leq\theta\leq\pi/2$, то $\sin\theta>0$, тогда $\cos\varphi>0$, и $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$.

Итак, область интегрирования:

$$V:\ \begin{cases} 0\leq r\leq R \\ 0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Интеграл примет вид:

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz = \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R (r\cos\varphi\sin\theta)^2\cdot r^2\sin\theta\, dr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \cos^2\varphi \sin^3\theta \cdot r^4 dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2\varphi \sin^3\theta \cdot \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^R \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2\varphi \sin^3\theta \cdot \frac{1}{5} R^5 \right) d\varphi$$

$$= \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin^3\theta \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi) \right) d\varphi =$$

$$= \frac{R^5}{10} \int_0^{\pi/2} \left(\sin^3\theta \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) d\theta$$

$$= \frac{R^5}{10} \int_0^{\pi/2} \left(\sin^3\theta \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi \right) \right) d\theta =$$

$$= \frac{\pi R^5}{10} \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{\pi R^5}{10} \int_0^{\pi/2} (-\sin^2\theta) \cdot (-\sin\theta) d\theta$$

$$= \frac{\pi R^5}{10} \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta - 1) d(\cos\theta) =$$

$$= \frac{\pi R^5}{10} \left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^5}{10} \left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\cos^3 0 + \cos 0 \right)$$

$$= \frac{\pi R^5}{10} \left(1 - \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \frac{\pi R^5}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi R^5}{15}$$

Задача 3.

Переходя к цилиндрическим координатам вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz\,, \qquad V: x^2+y^2=x, \qquad z=x^2+y^2, \qquad z=0$$

РЕШЕНИЕ. Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Якобиан такой замены $J = r$, то есть $dxdydz = r\,dzdrd\varphi$.

Уравнение $x^2+y^2=x$ примет вид, $r^2 = r\cos\varphi$, то есть $r=\cos\varphi$.

Уравнение $z=x^2+y^2$ примет вид $z=r^2$. Учитывая, что $x^2+y^2 \geq 0$, имеем $x \geq 0$, откуда $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Итак, область интегрирования:

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq r^2 \\ 0 \leq r \leq \cos\varphi \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Интеграл примет вид:

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} dr \int\limits_0^{r^2} (r\cos\varphi)^2 \cdot r dz$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} dr \int\limits_0^{r^2} r^3\cos^2\varphi\, dz =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} \left(r^3\cos^2\varphi \cdot z \Big|_0^{r^2} \right) dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} (r^5\cos^2\varphi) dr$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \left(\frac{1}{6} r^6 \Big|_0^{\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^8\varphi\,d\varphi=\frac{1}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^4 d\varphi$$

$$=\frac{1}{96}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+4\cos 2\varphi+6\cos^2 2\varphi+4\cos^3 2\varphi+\cos^4 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{96}\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{96}\cdot\frac{4}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{3}{96}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 4\varphi)d\varphi$$

$$+\frac{2}{96}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 2\varphi)d(\sin 2\varphi)+$$

$$+\frac{1}{96}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)^2 d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{96}+\frac{1}{48}(\sin\pi-\sin(-\pi))+\frac{1}{32}\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+$$

$$+\left(\sin 2\varphi-\frac{1}{3}\sin^3 2\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{384}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+2\cos 4\varphi+\cos^2 4\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{96}+\frac{\pi}{32}+\frac{1}{384}\left(\varphi+\frac{2}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{768}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 8\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{96}+\frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{384}+\frac{1}{768}\left(\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi}{96}+\frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{384}+\frac{\pi}{768}$$

$$=\frac{35}{768}\pi$$

ОТВЕТ. $\frac{35}{768}\pi$

Задача 4.

Решить тройной интеграл двумя способами (цилиндрическая и сферическая замена координат)

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)^2 dxdydz\,,$$

где $G = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \le a^2, x+z \ge 0\}$

Решение.

<u>Цилиндрическая система координат.</u>

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi\,; \quad dxdydz = r\,drd\varphi dz \\ z = z \end{cases}$$

Выражение $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ примет вид $r^2+z^2 \le a^2$, тогда

$$G\colon \begin{cases} -r\cos\varphi \le z \le \sqrt{a^2-r^2} \\ 0 \le r \le a \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Интеграл примет вид:

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)^2 dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a dr \int\limits_{-r\cos\varphi}^{\sqrt{a^2-r^2}} (r^2+z^2)^2 \cdot r dz$$

$$\int\limits_{-r\cos\varphi}^{\sqrt{a^2-r^2}} (r^2+z^2)^2 \cdot r dz = r \int\limits_{-r\cos\varphi}^{\sqrt{a^2-r^2}} (r^4+2r^2z^2+z^4) dz$$

$$= r\left(r^4 z + \frac{2r^2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5\right)\Bigg|_{-r\cos\varphi}^{\sqrt{a^2-r^2}} =$$

$$= r^5\sqrt{a^2-r^2} + \frac{2r^3}{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3} + \frac{1}{5}r\sqrt{(a^2-r^2)^5} + r^6\cos\varphi + \frac{2}{3}r^6\cos^3\varphi + \frac{1}{5}r^6\cos^5\varphi$$

$$\int_0^a r^5\sqrt{a^2-r^2}dr = \left|\begin{matrix} t^2=a^2-r^2 & r=\sqrt{a^2-t^2} & r=a\rightarrow t=0 \\ r^2=a^2-t^2 & dr=-\dfrac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}dt & r=0\rightarrow t=a \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_a^0 \left(\sqrt{a^2-t^2}\right)^5 \cdot t \cdot \left(-\frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}\right) \cdot dt = \int_0^a (a^2-t^2)^2 \cdot t^2 dt$$

$$= \int_0^a (a^4t^2 - 2a^2t^4 + t^6)dt =$$

$$= \left(\frac{a^4}{3}t^3 - \frac{2a^2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7\right)\Bigg|_0^a = \frac{1}{3}a^7 - \frac{2}{5}a^7 + \frac{1}{7}a^7 = \frac{8}{105}a^7$$

$$\int_0^a r^3\sqrt{(a^2-r^2)^3}dr = \left|\begin{matrix} t^2=a^2-r^2 & r=\sqrt{a^2-t^2} & r=a\rightarrow t=0 \\ r^2=a^2-t^2 & dr=-\dfrac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}dt & r=0\rightarrow t=a \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_a^0 \left(\sqrt{a^2-t^2}\right)^3 \cdot t^3 \cdot \left(-\frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}\right) \cdot dt = \int_0^a (a^2-t^2) \cdot t^4 dt$$

$$= \int_0^a (a^2t^4 - t^6)dt =$$

$$= \left(\frac{a^2}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7\right)\Bigg|_0^a = \frac{1}{5}a^7 - \frac{1}{7}a^7 = \frac{2}{35}a^7$$

$$\int_0^a r\sqrt{(a^2-r^2)^5}dr = \left|\begin{matrix} t^2=a^2-r^2 & r=\sqrt{a^2-t^2} & r=a\rightarrow t=0 \\ r^2=a^2-t^2 & dr=-\dfrac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}dt & r=0\rightarrow t=a \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_a^0 \sqrt{a^2-t^2} \cdot t^5 \cdot \left(-\frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}\right) \cdot dt = \int_0^a t^6 dt = \frac{1}{7}t^7\Bigg|_0^a = \frac{1}{7}a^7$$

$$\int_0^a \left(r^6\cos\varphi + \frac{2}{3}r^6\cos^3\varphi + r^6\cos^5\varphi\right)dr$$

$$= \frac{1}{7}\left(\cos\varphi + \frac{2}{3}\cos^3\varphi + \frac{1}{5}\cos^5\varphi\right)r^7\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{1}{7}a^7\left(\cos\varphi + \frac{2}{3}\cos^3\varphi + \frac{1}{5}\cos^5\varphi\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{8}{105}a^7+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{35}a^7+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}a^7+\frac{1}{7}a^7\left(\cos\varphi+\frac{2}{3}\cos^3\varphi+\frac{1}{5}\cos^5\varphi\right)\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{7}a^7\int_0^{2\pi}\left(1+\cos\varphi+\frac{2}{3}\cos^3\varphi+\frac{1}{5}\cos^5\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{7}a^7(\varphi+\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+\frac{2}{21}a^7\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)+\frac{1}{35}a^7\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\varphi)^2d(\sin\varphi)=\frac{2}{7}\pi a^7+$$

$$+\frac{1}{7}a^7(\sin 2\pi-\sin 0)+\frac{2}{21}a^7\left(\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$+\frac{1}{35}a^7\left(\sin\varphi-\frac{2}{3}\sin^3\varphi-\frac{1}{5}\sin^5\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{2}{7}\pi a^7$$

Сферическая система координат.

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\sin\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\,;\\ z=r\cos\theta\end{cases}\quad dxdydz=r^2\sin\theta\ drd\varphi d\theta$$

Выражение $x^2+y^2+z^2\le a^2$ примет вид $r\le a$, выражение $x+z\ge 0$:

$$r\cos\varphi\sin\theta+r\cos\theta\ge 0$$

$$\cos\varphi\sin\theta+\cos\theta\ge 0$$

$$\cos\varphi\ge-\operatorname{ctg}\theta\,;\quad \theta\ge-\operatorname{arcctg}(\cos\varphi)$$

$$G:\ \begin{cases}0\le r\le a\\ -\operatorname{arcctg}(\cos\varphi)\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

Интеграл примет вид:

$$\iiint\limits_G(x^2+y^2+z^2)^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\operatorname{arcctg}(\cos\varphi)}^{\pi}d\theta\int_0^a r^4\cdot r^2\sin\theta\,dr$$

$$\int_0^a r^4\cdot r^2\sin\theta\,dr=\frac{1}{7}r^7\sin\theta\Big|_0^a=\frac{1}{7}a^7\sin\theta$$

$$\int_{-\operatorname{arcctg}(\cos\varphi)}^{\pi} \frac{1}{7}a^7 \sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{7}a^7 \cos\theta \Big|_{-\operatorname{arcctg}(\cos\varphi)}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{7}a^7(\cos\pi - \cos(-\operatorname{arcctg}(\cos\varphi))) =$$

$$= -\frac{1}{7}a^7\left(-1 - \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\right) = \frac{1}{7}a^7\left(1 + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{7}a^7\left(1 + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\right) d\varphi = \frac{1}{7}a^7\varphi \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{7}a^7 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2-\sin^2\varphi}} d(\sin\varphi)$$

$$= \frac{2}{7}a^7\pi +$$

$$+\frac{1}{7}a^7 \arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{7}a^7\pi + \frac{1}{7}a^7\left(\arcsin\left(\frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin\left(\frac{0}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{7}a^7\pi$$

ОТВЕТ. $\frac{2}{7}a^7\pi$