Криволинейные интегралы первого рода

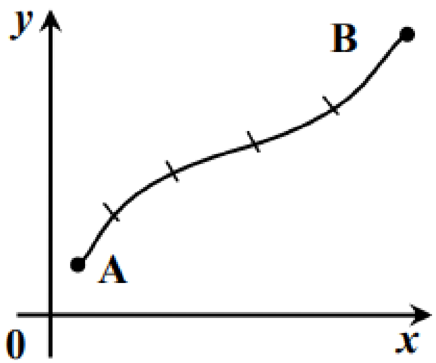


Рисунок 1.1

Пусть функция $f(P)=f(x,y)$ есть функция, непрерывная в некоторой области на плоскости xOy, и L – некоторая гладкая или кусочно-гладкая кривая, расположенная в этой области. Разобьём кривую системой точек на элементарные дуги $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (рисунок 1.1). На каждой из дуг $l_i\, (i=\overline{1,n})$ выберем произвольную точку $P_i(x_i;y_i)$ и умножим значение функции в этой точке на длину Δl_i элементарной дуги l_i. Сумма таких произведений по всем элементарным дугам $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta l_i$ называется *интегральной суммой*. Обозначим наибольшую из длин элементарных дуг $\Delta=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$.

Криволинейным интегралом первого рода (КРИ-1) от функции $f(P)$ по длине дуги кривой L называется предел интегральных сумм при условии $\Delta \to 0$:

$$\int_L f(P)\,dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta l_i \,. \qquad (1.1)$$

КРИ-1 обладает следующими свойствами:

1) $\int\limits_L \left(k_1 f_1(P) \pm k_2 f_2(P)\right) dl = k_1 \int\limits_L f_1(P) dl \pm k_2 \int\limits_L f_2(P) dl$, где k_1, k_2 – некоторые числа;

2) если $L = L_1 + L_2$, то $\int\limits_L f(P) dl = \int\limits_{L_1} f(P) dl + \int\limits_{L_2} f(P) dl$;

3) $\int\limits_{AB} f(P) dl = \int\limits_{BA} f(P) dl$, т. е. интеграл не зависит от направления дуги интегрирования.

Для вычисления КРИ-1 пользуются формулами:

– если кривая задана уравнением $y=\varphi(x)$, где $a \le x \le b$, то $dl=\sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}\,dx$ и

$$\int_L f(P)\,dl=\int_a^b f\left(x,\varphi(x)\right)\cdot\sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx; \tag{1.2}$$

– если кривая задана уравнением $x=g(y)$, где $c \le y \le d$, то $dl=\sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\,dy$ и

$$\int_L f(P)\,dl=\int_c^d f\left(g(y),y\right)\cdot\sqrt{1+g'(y)^2}\,dy; \tag{1.3}$$

– если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$, то $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ и

$$\int_L f(P)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt; \qquad (1.4)$$

– если кривая задана в полярной системе координат (ПСК) уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то $dl = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$ и

$$\int_L f(P)\,dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \cdot \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (1.5)$$

Аналогично определяются КРИ-1 от непрерывной в некоторой пространственной области функции $f(M) = f(x, y, z)$ по длине дуги пространственной кусочно-гладкой кривой L, расположенной в этой области:

$$\int_L f(M)\,dl = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta l_i\,. \qquad (1.6)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$, то $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$ и

$$\int_L f(P)\,dl = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\cdot\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt\,. \qquad (1.7)$$

Примеры решения задач

Задача 1.

Вычислить $I = \int\limits_L \frac{dl}{2x - 3y}$, где L – отрезок прямой, заключённый между точками $A(0;3)$ и $B(1;5)$.

Решение

Напишем уравнение прямой AB по двум точкам: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

$$AB: \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-3}{5-3};\ \ \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2};\ \ y = 2x + 3;\ \ y' = 2;\ \ dl = \sqrt{1 + \left(y'\right)^2} = \sqrt{5}dx.$$

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{2x - 3\left(2x+3\right)} = \sqrt{5}\int\limits_0^1 \frac{dx}{-4x - 9} = -\frac{\sqrt{5}}{4}\ln\left|4x+9\right|\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\ln 13 - \ln 9\right) = -\frac{\sqrt{5}}{4}\ln\frac{13}{9}.$$

Задача 2.

Вычислить $I=\int\limits_L y\,dl$ по параболе $y^2=2x$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(2;2)$.

Решение

Выразим из уравнения параболы x: $x=y^2/2$, $x'=y$; $dl=\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\sqrt{1+y^2}\,dy$.

$$I=\int\limits_L y\,dl=\int\limits_0^2 y\sqrt{1+y^2}\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+y^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right|_0^2=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(5^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}.$$

Задача 3.

Вычислить $I=\int\limits_L xydl$, где L – контур прямоугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(5;0)$, $B(5;3)$, $C(0;3)$.

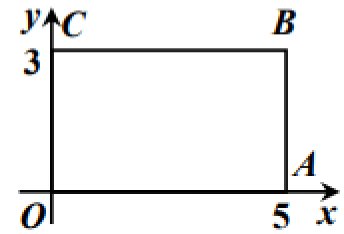


Рисунок 1.2

Решение

Сделаем рисунок (рисунок 1.2). Применим свойство 2 КРИ-1 и вычислим интегралы по каждому из отрезков OA, AB, BC, CO.

а) OA: $y=0$, $y'=0$, $0\le x\le 5$, $I_1=\int\limits_0^5 x\cdot 0\sqrt{1+0}dx=0$;

б) AB: $x=5$, $x'=0$, $0\le y\le 3$, $I_2=\int\limits_0^3 5y\sqrt{1+0}dy=\left.\dfrac{5y^2}{2}\right|_0^3=\dfrac{45}{2}$;

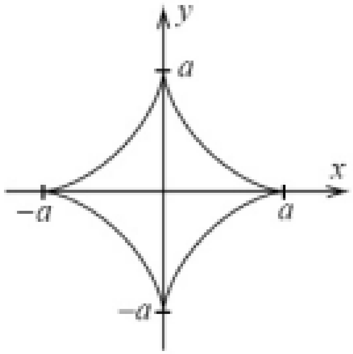
в) BC: $y=3$, $y'=0$, $0\le x\le 5$, $I_3=\int\limits_0^5 3x\sqrt{1+0}dx\left.\dfrac{3x^2}{2}\right|_0^5=\dfrac{75}{2}$;

г) CO: $x=0$, $x'=0$, $0\le y\le 3$, $I_4=\int\limits_0^3 y\cdot 0\sqrt{1+0}dy=0$;

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4=\frac{45}{2}+\frac{75}{2}=60.$$

Задача 4.

Вычислить $\int\limits_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})dl$, где L – дуга астроиды



$\begin{cases} x = a\cos^3\varphi \\ y = a\sin^3\varphi \end{cases}$, $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Имеем $x_t' = -3a\cos^2 t\sin t$, $y_t = 3a\sin^2 t\cos t$;

Поэтому

$$\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})dl = \int_0^{2\pi} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t + \sin^4 t)\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t + \sin^4 t)\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t + \sin^4 t)\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}\,dt =$$

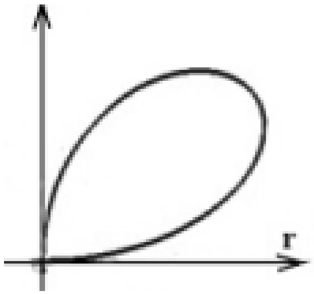
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3aa^{\frac{4}{3}}(\cos^5 t\sin t+\sin^5 t\cos t)dt=\frac{1}{2}a^{\frac{7}{3}}(-\cos^6 t+\sin^6 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}a^{\frac{7}{3}}(2+2)=a^{\frac{7}{3}}.$$

Задача 5.

Вычислить $\int\limits_L (x+y)dl$, где L –лепесток лемнискаты

$r = \sqrt{\sin 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.



<u>Решение.</u> Имеем $r' = \dfrac{\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$, $(r')^2 = \dfrac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}$ и $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$; Получаем

$$\int\limits_L (x+y)dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\sqrt{\sin 2\varphi + \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi = [$$ приводим к общему знаменателю под знаменателю под знаком $\sqrt{\ }$ $]=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\varphi+r\sin\varphi)\sqrt{\frac{\sin^2 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\varphi+r\sin\varphi)\frac{1}{\sqrt{\sin 2\varphi}}d\varphi=\left[\ \text{по условию } r=\sqrt{\sin 2\varphi}\ \right]=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\varphi+r\sin\varphi)\frac{1}{r}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=(-\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$$