Криволинейные интегралы второго порядка

Криволинейный интеграл от непрерывной в некоторой области плоскости xOy функции $P(x,y)$ по координате x вдоль дуги плоской кусочно-гладкой кривой L, расположенной в этой области, связан с КРИ-1 соотношением

$$\int_L P(x,y)\,dx = \int_L P(x,y)\cdot\cos\alpha\,dl,$$

где α – угол между касательной, проведённой к кривой в любой её точке, и положительным направлением оси Ox (рисунок 2.1).

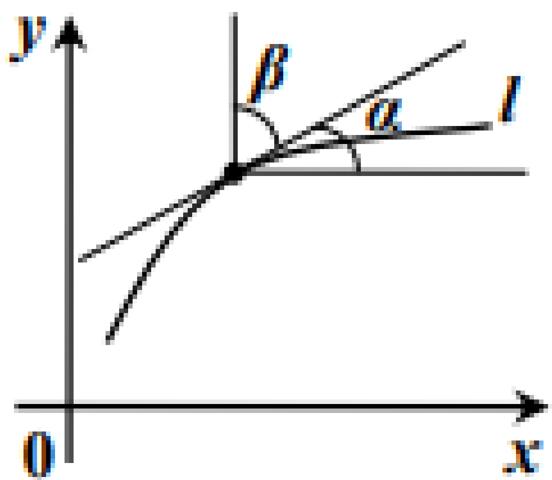


Рисунок 2.1

Аналогично,

$$\int_L Q(x,y)\,dy = \int_L Q(x,y)\cdot\cos\beta\,dl,$$

где β – угол между касательной, проведённой к кривой в любой её точке, и положительным направлением оси Oy.

Обычно рассматривают сумму интегралов по координате x и y и записывают в виде:

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \qquad (2.1)$$

КРИ-2 обладают теми же свойствами, что и КРИ-1, кроме

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\,. \qquad (2.2)$$

Для вычисления КРИ-2 пользуются формулами:

– если кривая задана уравнением $y=\varphi(x)$ и $a\le x\le b$, то

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\Big(P\big(x,\varphi(x)\big)+Q\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\Big)dx;\qquad(2.3)$$

– если кривая задана уравнением $x=g(y)$ и $c\le y\le d$, то

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_c^d\Big(P\big(g(y),y\big)g'(x)+Q\big(g(y),y\big)\cdot\Big)dy;\qquad(2.4)$$

– если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$ и $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, то

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\Big(P\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)dt.\quad(2.5)$$

В случае замкнутой области положительное направление обхода выбирают так, чтобы область, ограниченная кривой L, всегда оставалась слева. Интеграл по замкнутой области обозначают $\oint\limits_L Pdx + Qdy$.

Аналогично определяются криволинейные интегралы по координатам, если кривая L лежит в плоскостях xOz и yOz.

КРИ-2 от непрерывных в некоторой пространственной области функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ вдоль дуги кусочно-гладкой кривой L определяют так:

$$\int\limits_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \qquad (2.6)$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot x'(t) +$$

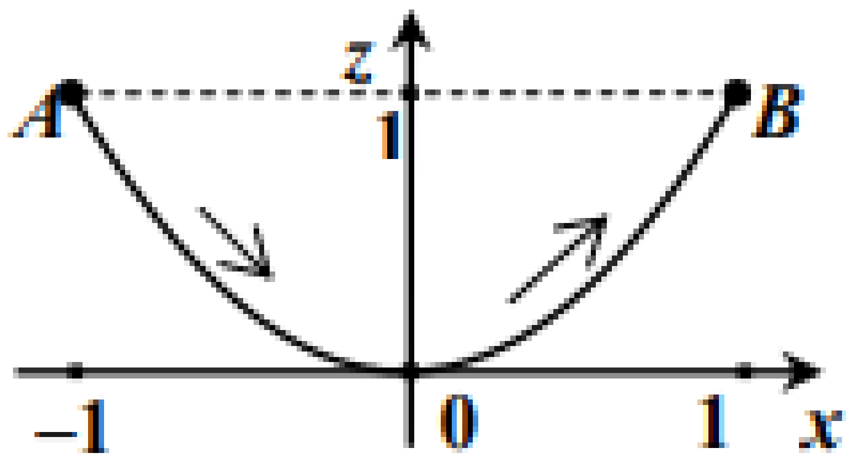
$$+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot z'(t)\Big)dt. \qquad (2.7)$$

Примеры решения задач
Задача 1

Вычислить $I = \int\limits_{AB} \left(x^2 - 2xz\right)dx + \left(z^2 - 2xz\right)dz$, где AB – дуга параболы $z = x^2$, пробегаемая от точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.

Решение

Сделаем рисунок



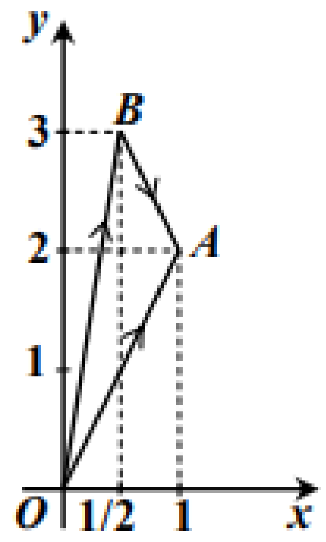
$$I=\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x\cdot x^2+\left(x^4-2x\cdot x^2\right)\cdot 2x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x^3+\right.$$

$$\left.+2x^5-4x^4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{3}-\frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{14}{15}.$$

Задача 2

Вычислить $I = \int\limits_L \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, где L – ломаная OBA, точки $A(1;2)$, $B(1/2;3)$.

Контур OBA состоит из отрезков OB и BA, поэтому, согласно свойству аддитивности, $I = \int\limits_{OB} + \int\limits_{BA}$. Уравнение прямой OB: $y = 6x$, где $0 \le x \le 0,5$. Тогда $dy = 6dx$.



$$\int\limits_{OB}\left(xy-y^2\right)dx+xdy=\int\limits_0^{0,5}\left(6x^2-36x^2+6x\right)dx=$$

$$=\left(-10x^3+3x^2\right)\Big|_0^{0,5}=-0,5\,.$$

Найдём уравнение прямой BA: $\dfrac{x-1/2}{1-1/2}=\dfrac{y-3}{2-3}$; $y=4-2x$, где $0,5\le x\le 1$.

$$\int\limits_{BA}\left(xy-y^2\right)dx+xdy=\left[\begin{array}{l}y=4-2x\\ dy=-2dx\end{array}\right]=\int\limits_{0,5}^{1}\left(4x-2x^2-(4-2x)^2-2x\right)dx=$$

$$=\int\limits_{0,5}^{1}\left(18x-6x^2-16\right)dx=\left(9x^2-2x^3-16x\right)\Big|_{0,5}^{1}=(9-2-16)-\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}-8\right)=-3\,.$$

$$I=-0,5-3=-3,5\,.$$

Задача 3

Вычислить $\int\limits_L xdy - ydx$, где L – окружность радиуса R с центром в начале координат, которая обходится против часовой стрелки.

Решение. Окружность имеет параметрические уравнения: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$,

при $t \in [0;2\pi]$.

$$\int\limits_L xdy - ydx = \int\limits_0^{2\pi} (R\cos t \cdot R\cos t - R\sin t \cdot (-R\sin t))dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t)dt == \int\limits_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2.$$

Задача 4

Вычислить $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 y dy$, где L – отрезок от точки $A(1,2)$ до точки $B(2,4)$, по прямой AB.

Решение. Рассмотрим L- отрезок AB: подставим координаты точек в уравнение: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{4-2}$. Получаем уравнение прямой AB: $y=2x$, $x \in [1;2]$. Т. к $dy = y'dx = 2dx$, то

$$\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 y dy = \int\limits_1^2 (x \cdot 2x - 1)dx + x^2 2x \cdot 2dx =$$

$$\int\limits_1^2 (2x^2 - 1 + 4x^3)dx = (\frac{2}{3}x^3 - x + x^4)\Big|_1^2 = \frac{56}{3}.$$

Задача 5

Вычислить $\int\limits_L (x+y)dx + 2zdy + xydz$, где L – линия заданная уравнениями $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 3 - t \end{cases}$, $t \in [1;2]$.

Решение.

$$\int\limits_L (x+y)dx + 2zdy + xydz = \int\limits_1^2 (t+t^2)dt + 2(3-t)\cdot 2tdt + t\cdot t^2(-dt) =$$

$$= \int\limits_1^2 (t + t^2 + 12t - 4t^2 - t^3)dt = \int\limits_1^2 (13t - 3t^2 - t^3)dt = \left(\frac{13}{2}t^2 - t^3 - \frac{1}{4}t^4\right)\Bigg|_1^2 = \frac{35}{4}$$