Лекция

Тема: «Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования»

12.04.2022

Пример 1.

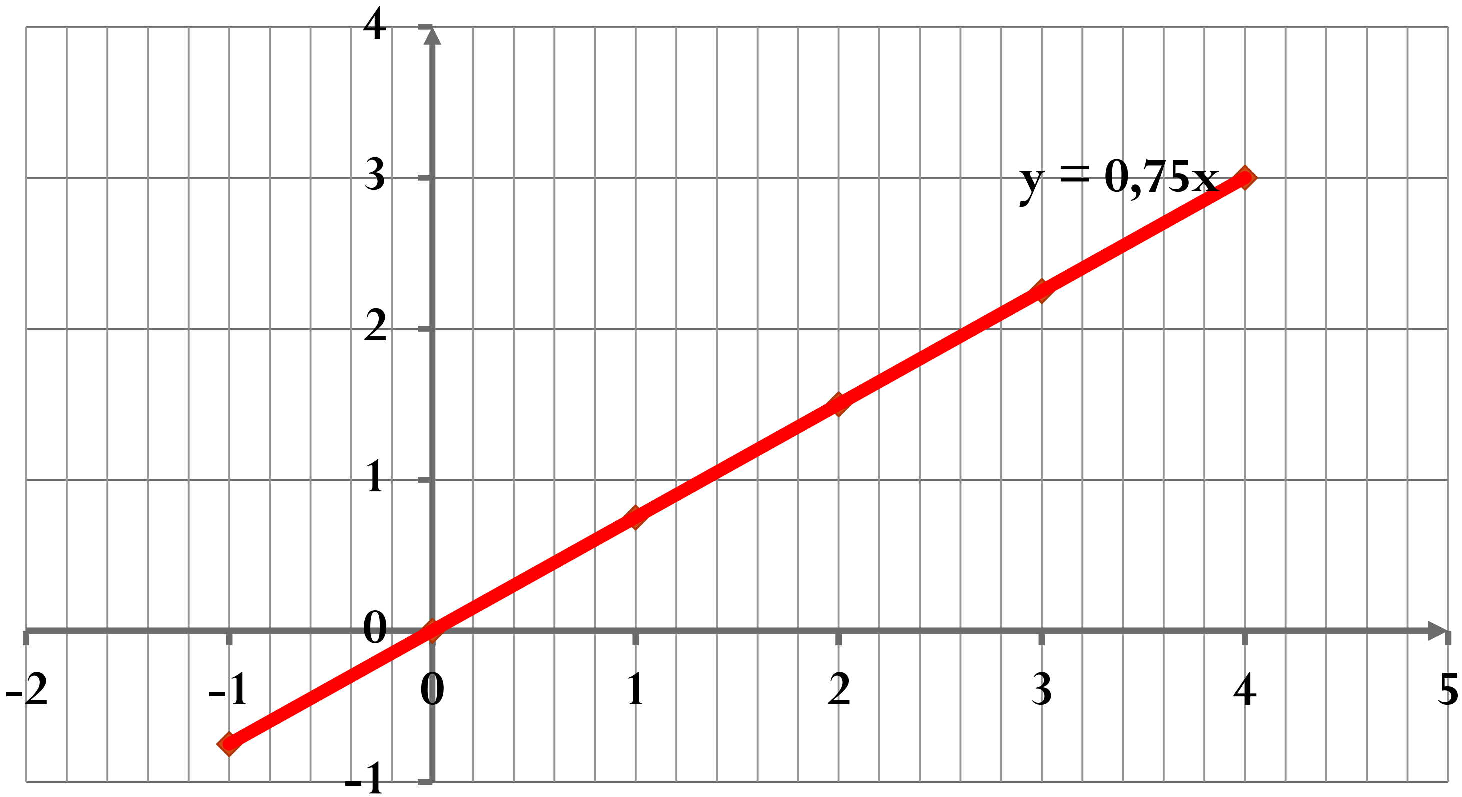
Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}(x-y)dl$, если ***AB*** есть отрезок прямой от $A(0;\,0)$ до $B(4;\,3)$.

Решение

1. Для вычисления интеграла используем формулу

2. Построим контур интегрирования

$$I=\int\limits_{a}^{b} f(x;y(x))\sqrt{1+\left(y'\right)^{2}}\,dx$$



3. Найдём уравнение прямой ***AB***

$$т.к. \qquad y = kx, \qquad k = tg\,\alpha \Rightarrow y = 0{,}75x$$

4. Найдём производную y': $(0{,}75x)' = 0{,}75 = \dfrac{3}{4}$

5. Получаем:

$$\int_{AB}(x-y)dl = \int_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx$$

$$I = \frac{5}{4}\int_0^4 \frac{1}{4}xdx = \frac{5}{32}x^2\Big|_0^4 = 2{,}5$$

Ответ: $\int_{AB}(x-y)dl = 2{,}5$, если ***AB*** есть отрезок прямой от $A(0;\,0)$ до $B(4;\,3)$.

Пример 2.

- Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AB} (xy-1)dx + x^2 y dy$$

если кривая *интегрирования* есть дуга параболы $4x + y^2 = 4$ от точки $A(1;\, 0)$ до точки $B(0;\, 2)$.

Решение

Удобнее вычислить этот интеграл, преобразовав его к обыкновенному интегралу по переменной y.

$$x = 1 - \frac{y^2}{4}, \qquad dx = -\frac{y}{2}dy, \qquad y \in [0;2]$$

- Исходный интеграл преобразуется к виду:

$$I = \int_{AB}(xy-1)dx + x^2 y dy = \int_0^2 \left(y \cdot \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) - 1 \right)\left(-\frac{y}{2}\right)dy + \left(1 - \frac{y^2}{4}\right)^2 ydy$$

- Раскроем скобки и приведём подобные:

$$I = \int_0^2 \left(\frac{y^5}{16} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2} \right)dy$$

- Найдём первообразную и вычислим интеграл:

$$I = \left(\frac{y^6}{96} + \frac{y^5}{40} - \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{6} + \frac{3y^2}{4} \right) \Bigg|_0^2 = -\frac{1}{5}$$

Независимость криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Теорема. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в односвязной области D и контур C целиком находится в этой области.

Тогда следующие 4 условия эквивалентны, т.е выполнение любого из них влечёт за собой выполнение остальных трёх:

1) в области *D повсюду* выполняется тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

2) для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой C, расположенной в области *D*,

$$\oint_C P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$$

3) для любых двух точек ***A*** и ***B*** области ***D*** значение интеграла $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ не зависит от пути интегрирования

4) выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции, определённое в области ***D:***

$$dU(x;y) = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

Формула Грина
(1793 – 1841 гг., англ математик)

- Устанавливает связь между криволинейным и двойным интегралами

Теорема: Пусть D – некоторая простая замкнутая область, ограниченная контуром C, и пусть функции

$$P(x;y) \quad u \quad Q(x;y)$$

непрерывны вместе со своими частными производными в данной области.

- Тогда имеет место формула (формула Грина):

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_C P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$