

Формула Остроградского-Грина

Рассмотрим криволинейные интегралы второго рода вида

$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, где L - замкнутый самонепересекающийся контур, расположенный в плоскости Oxy .

Теорема: Если кривая L - замкнутая граница области D , а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производ-

ными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой области D (включая границу L), то справедлива **формула Остроградского-Грина**:

$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$. Причем интегрирование производится вдоль кривой L в положительном направлении.

Пример 1. Вычислить $\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, где L - контур тре-

угольника с вершинами $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$, пробегаемый против часовой стрелки.

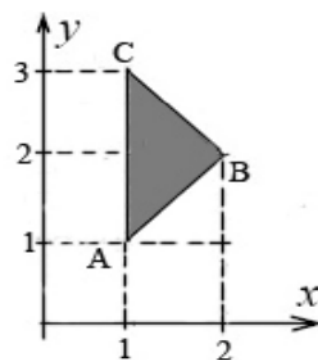
Решение. В данном интеграле $P(x, y) = 2(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = (x + y)^2$.

Следовательно $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x + y) - 4y = 2(x - y)$.

Таким образом, $\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy =$

$\iint_D 2(x - y)dxdy$, где область D треугольник ABC . Уравнение прямой AB : $y = x$. Уравнение BC : $y = 4 - x$, $x \in [1; 2]$. Вычисляем двойной интеграл по данной области:

$$\iint_D 2(x - y)dxdy = 2 \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x - y)dy = -\frac{4}{3}.$$



Пример 2. Вычислить $\oint_L xy^2 dy - yx^2 dx$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 4$, пробегаемая против часовой стрелки.

Решение. В данном интеграле $P(x, y) = -x^2 y$, $Q(x, y) = xy^2$,
 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$.

Таким образом, $\oint_L xy^2 dy - yx^2 dx = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.

Введем полярные координаты: $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \varphi \in [0; 2\pi]$.

Тогда, $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_D r^2 r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 4^2 d\varphi = 8\pi$.

Приложения криволинейного интеграла первого рода

Геометрические приложения криволинейного интеграла первого рода. Приведем в виде таблицы геометрические приложения криволинейного интеграла первого рода

Таблица 1.

Длина кривой AB находится по формуле $L = \int_{AB} dl$, если кривая задана в		
в прямоугольных координатах уравнением		в полярных координатах уравнением
$y = f(x)$, то $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx$	$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ то $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$	$r = r(\varphi)$, то $dl = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$
$x = f(y)$, то $dl = \sqrt{1 + (x')^2} dy$	(описывается вектором) $\vec{r}[x(t); y(t); z(t)]$, то $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$	
Площадь цилиндрической поверхности		
Поверхность $z = f(x, y)$, направляющая поверхности – кривая AB , образующая параллельна оси Oz .		$S = \int_{AB} f(x, y) dl$

Пример 1. Найти длину кардиоиды $\begin{cases} x = 2a \cos t - a \cos(2t), \\ y = 2a \sin t - a \sin(2t), \end{cases}$ где $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Прежде чем найти dl , найдем производные $x' = -2a \sin t + 2a \sin(2t)$, $y' = 2a \cos t - 2a \cos(2t)$.

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 2a \sqrt{(\sin t - \sin(2t))^2 + (\cos t - \cos(2t))^2} dt = \\ &= 2a \sqrt{(1 - \sin t \cdot \sin(2t) - \cos t \cdot \cos(2t))} dt = \\ &= 2a \sqrt{2(1 - 2 \sin^2 t \cdot \cos t - \cos^3 t + \sin^2 t \cdot \cos t)} dt = 2a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \end{aligned}$$

$$= 2a \sqrt{4 \left(\frac{1 - \cos t}{2} \right)} dt = 4a \sqrt{\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)} dt = 4a \sin \left(\frac{t}{2} \right) dt.$$

Найдем длину данной дуги

$$L = \int_{AB} dl = 4a \int_0^{2\pi} \sin \left(\frac{t}{2} \right) dt = -8a \cos \left(\frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 16a \text{ (ед.)}.$$

Пример 3. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln(x)$, $1 \leq x \leq 2$.

Решение. Функция задана в явном виде, для вычисления длины дуги кривой используем формулу: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$. Найдём $y' = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x \right)' = \frac{x^2 - 1}{2x}$

$$\text{и } \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x} \right)^2} = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}} = \sqrt{\left(\frac{x^2 + 1}{2x} \right)^2} = \frac{x^2 + 1}{2x}.$$

$$l = \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{3 + 2 \cdot \ln 2}{4} = \frac{3 + \ln 4}{4} \text{ (ед.)}.$$

Физические приложения криволинейного интеграла первого рода

Приведем в виде таблицы физические приложения криволинейного интеграла первого рода для материальной кривой AB (провод, цепь, трос, ...), имеющей в точке M плотность $\rho = \rho(M)$.

Таблица 2

Вычислить	На плоскости $M(x, y)$	В пространстве $M(x, y, z)$
Массу кривой	$m = \int_{AB} \rho(x, y) dl$	$m = \int_{AB} \rho(x, y, z) dl$
Статистические моменты	$M_x = \int_{AB} y \rho(x, y) dl$ $M_y = \int_{AB} x \rho(x, y) dl$	$M_x = \int_{AB} \rho(x, y, z) \sqrt{y^2 + z^2} dl$ $M_y = \int_{AB} \rho(x, y, z) \sqrt{x^2 + z^2} dl$ $M_z = \int_{AB} \rho(x, y, z) \sqrt{x^2 + y^2} dl$
Координаты центра масс	$x_0 = \frac{M_x}{m}, y_0 = \frac{M_y}{m}.$	$x_0 = \frac{M_x}{m}, y_0 = \frac{M_y}{m}, z_0 = \frac{M_z}{m}.$
Моменты инерции	относительно начала координат:	
	$I_O = \int_{AB} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dl$	$I_O = \int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl$
	относительно оси Ox :	
	$I_x = \int_{AB} y^2 \rho(x, y) dl$	$I_x = \int_{AB} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl$
	относительно оси Oy :	
	$I_y = \int_{AB} x^2 \rho(x, y) dl$	$I_y = \int_{AB} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dl$
Координаты центра тяжести	относительно оси Oz :	
	$I_z = \int_{AB} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dl$	
		$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, y_c = \frac{M_{xz}}{m}, z_c = \frac{M_{xy}}{m}$

Пример 2: Определить массу проволоки, имеющей форму отрезка от точки $A(0,0)$ до $B(4,3)$. Масса распределена вдоль отрезка плотностью $\rho = x - y$.

Решение. Уравнение прямой AB имеет вид: $y = \frac{3x}{4}$, $x \in [0;4]$, тогда

$$y' = \frac{3}{4};$$

$$m = \int_{AB} \rho(x, y) dl = \int_{AB} (x - y) dl = \int_0^4 \left(x - \frac{3x}{4}\right) \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx = \frac{5}{16} \int_0^4 x dx = \frac{5}{2}.$$

Пример 3: Определить массу провода, имеющей форму полуокружности,

заданную уравнениями: $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \leq 0 \end{cases}$, плотностью $\rho = 2y$.

Решение: Уравнение полуокружности в параметрическом виде имеет вид:

$$L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

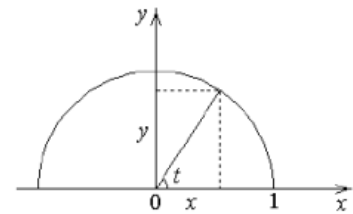


Рис. 13

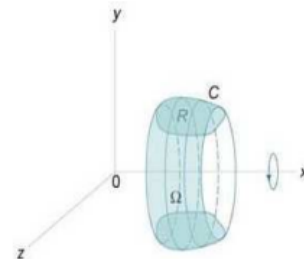
$$\begin{aligned} m &= \int_{AB} \rho(x, y) dl = \int_{AB} 2y dl = 2 \int_0^\pi \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dx = 2 \int_0^\pi \sin t dx = \\ &= 2(-\cos t) \Big|_0^\pi = 2(1+1) = 4 \text{ (ед. массы)}. \end{aligned}$$

Приложения криволинейного интеграла второго рода

Геометрические приложения криволинейного интеграла второго рода. Площадь S плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L , можно найти по формулам

$S = \oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$, при этом кривая L обходится против часовой стрелки.

Объем тела, образованного вращением замкнутой кривой относительно оси Ox . Предположим, что область R расположена в верхней полуплоскости $y \geq 0$ и ограничена гладкой, кусочно-непрерывной и замкнутой кривой C , обход которой осуществляется против часовой стрелки.



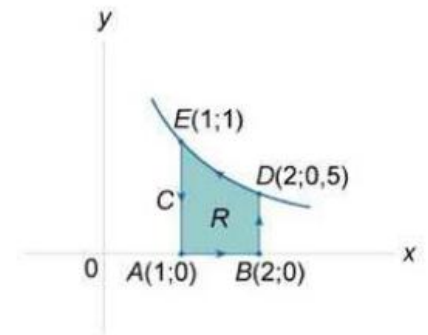
В результате вращения области R вокруг оси Ox образуется тело Ω
 Объем данного тела определяется формулами

$$V = -\pi \oint_C y^2 dx = -2\pi \oint_C xy dy = -\frac{\pi}{2} \oint_C 2xy dy + y^2 dx$$

Пример 1. Найти площадь области, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$, осью Ox и вертикальными прямыми $x = 1, x = 2$ (рис. 16).

Решение. Вычислим площадь с помощью криволинейного интеграла:

$$S = -\oint_C y dx = -\int_{AB} y dx - \int_{BD} y dx - \int_{DE} y dx - \int_{EA} y dx$$



Найдем отдельно каждый из интегралов:

$$-\int_{AB} y dx = -\int_1^2 0 \cdot dx = 0; \quad -\int_{BD} y dx = -\int_0^{0,5} y \cdot dx = 0;$$

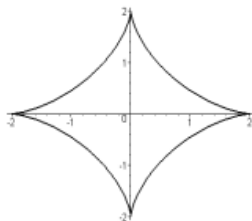
$$-\int_{DE} y dx = -\int_2^1 \frac{1}{x} dx = -\ln x \Big|_2^1 = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2;$$

$$-\int_{EA} y dx = -\int_1^0 y \cdot dx = 0.$$

Следовательно, площадь заданной области равна $S = \ln 2$.

Пример 2: Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой

Решение. Астроида задается уравнением $L: \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$



Если $x = 2\cos^3 t$, то $dx = -6\cos^2 t \cdot \sin t dt$, если
 $y = 2\sin^3 t$, то $dy = 6\sin^2 t \cdot \cos t dt$; очевидно
 $0 \leq t \leq 2\pi$. Получаем:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \int_0^{2\pi} (2\cos^3 t \cdot 6\sin^2 t \cos t + 2\sin^3 t \cdot 6\cos^2 t \sin t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (12\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)) dt = \int_0^{2\pi} 3(2\cos t \sin t)^2 dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 3\sin^2 2t dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \left(\frac{3}{2}t - \frac{3}{8}\sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2} \text{ (кв.ед.)}. \end{aligned}$$