

## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### Способы задания поверхности

Рассмотрим способы задания поверхности в трёхмерном пространстве.

**1. Параметрическое задание.** Пусть поверхность  $S = \{s\}$  точек  $s$  задана непрерывным отображением:

$$(x, y) \rightarrow (x, y, z = f(x, y)).$$

Рассмотрим на этой поверхности семейство кривых, зависящих от параметра  $u$ . При этом через каждую точку поверхности проходит только одна кривая этого семейства. Далее рассмотрим также ещё одно семейство, зависящее от параметра  $v$ . Линии семейств, пересекаясь в одной точке поверхности, образуют координатную сеть. Таким образом,  $x, y, z$  являются функциями параметров  $u, v$ :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

**2. Явный способ задания.** Пусть на плоскости  $(x, y)$  имеется область  $D$  и в ней определена непрерывная функция  $z = f(x, y)$ . Рассмотрим отображение плоской области  $D$  в область  $S = \{s\}$  трёхмерного пространства

$$(x, y) \rightarrow (x, y, z = f(x, y)).$$

Совокупность точек  $\{s\}$  трёхмерного пространства образует поверхность.

### Сторона поверхности и её ориентация

Рассмотрим гладкую поверхность  $\{s\}$ , на которой выберем замкнутый кусочно-гладкий контур. Возьмём на нём точку и проведём в ней нормаль к поверхности, которой припишем одно из двух возможных направлений. Будем двигаться по этому контуру. Возможны следующие ситуации:

1. Движение по любому замкнутому контуру приводит к тому, что нормаль возвращается в исходное положение.
2. Существует замкнутый контур, при обходе которого, направление нормали меняется на противоположное.

Мы будем в первом случае называть поверхность двусторонней, а во втором – односторонней. Подчеркнём, что на двусторонней поверхности выбор направления нормали в одной точке однозначно определяет это направление в других точках. Примером двусторонней поверхности является гладкая поверхность, заданная параметрически.

Определим, теперь, ориентацию поверхности. Пусть поверхность  $\{s\}$  – двусторонняя и ограничена простым замкнутым контуром  $L$ . Пусть наблюдатель двигается по  $L$  так, что нормаль направлена от ног к голове. Если он всё время видит  $\{s\}$  слева от себя, то направление обхода назовём положительным, а в противном случае – отрицательным.

Выбранное положительное (отрицательное) направление обхода контура, ограничивающего поверхность, назовём ориентацией поверхности.

## Поверхностный интеграл 1-го рода

Пусть имеется гладкая (кусочно-гладкая) поверхность  $S$ . В точках этой поверхности задана функция  $f(x, y, z)$ . Интеграл вида  $\iint_S f(x, y, z) dS$  называется поверхностным интегралом I рода от функции  $f(x, y, z)$  по поверхности  $S$ . С физической точки зрения он представляет массу поверхности в точках которой задана плотность  $f(x, y, z)$ .

Приведём основные свойства поверхностного интеграла первого рода.

**Свойство 1.** Если  $u = f(x, y, z)$  непрерывна на  $S$ , то  $f(x, y, z)$  интегрируема.

**Свойство 2.** (линейность). Если  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  интегрируемы на  $S$ , то их произведение и сумма  $\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)$  тоже интегрируемы на  $S$  для любых  $\alpha, \beta$

**Свойство 3.** Для неперекрывающихся гладких (кусочно-гладких) поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  при интегрируемой  $f(x, y, z)$  будет существовать

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS_1 + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS_2,$$

где  $S = S_1 \cup S_2$ . Здесь  $S_1$  и  $S_2$  называются неперекрывающимися, если  $S_1 \cap S_2$  содержит конечное число кусочно-гладких кривых (может быть и пустое). Это свойство 3 называется аддитивностью интеграла по области.

**Свойство 4.**  $\iint_S 1 dS = \Delta S$  - площадь поверхности  $S$ .

**Свойство 5.** Если  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$  на  $S$  и функции интегрируемы, то

$$\iint_S f(x, y, z) dS \leq \iint_S g(x, y, z) dS$$

(монотонность интеграла).

**Свойство 6.** Если  $f(x, y, z)$  интегрируема на  $S$ , то  $|f(x, y, z)|$  тоже интегрируема на  $S$  и

$$\left| \iint_S f(x, y, z) dS \right| \leq \iint_S |f(x, y, z)| dS.$$

## Сведение поверхностного интеграла 1-го рода к двойному

**Случай 1.** Параметрически заданная поверхность. Пусть поверхность  $S$  кусочно-гладкая, задана как  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ , где  $(u, v) \in D$  – квадратуемая область и  $f(x, y, z)$  – непрерывна на  $S$ . Тогда существует

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Здесь в интеграле 1-го рода коэффициенты Гаусса  $E, G, F$  имеет вид:

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2, \quad G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2, \quad F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v'$$

и поверхностный интеграл 1-го рода существует, если существует двойной интеграл. Оба интеграла существуют, если  $f(x, y, z)$  непрерывна на  $S$ .

**Случай 2.** Явное задание поверхности  $S$ . Если  $S$  – гладкая поверхность, заданная уравнением  $z = z(x, y)$  при  $(x, y) \in D$  – квадратуемой области, и  $f(x, y, z)$  – ограниченная функция на  $S$ , то интеграл 1-го рода

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

и существует, если существует двойной интеграл. Для гладкой  $S$  и непрерывной  $f(x, y, z)$ , оба интеграла существуют одновременно.

В случае поверхности, заданной уравнением  $x = x(y, z)$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_1} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz,$$

где  $(y, z) \in D_1$  – квадратуемая область, а также при  $y = y(x, z)$  имеем

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_2} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz$$

для  $(x, z) \in D_2$  – квадратуемой области. Отметим, что все эти формулы получаются как частные для параметрически заданной  $S$ .

**Пример 21.** Вычислить  $\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  для  $S$  – части цилиндрической

поверхности:  $x = a \cos u$ ,  $y = a \sin u$ ,  $z = v$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 \leq v \leq h$ .

**Решение.** Применим формулу для вычисления интеграла для параметрически заданной поверхности. Имеем  $E = a^2$ ,  $G = 1$ ,  $F = 0$ . Поэтому

$$\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{a du dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} = 2\pi a \int_0^h \frac{dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} = 2\pi a \ln \frac{h + \sqrt{a^2 + h^2}}{a}.$$

Здесь область  $D$  – квадратуемый прямоугольник  $[0, 2\pi] \times [0, h]$ .

**Пример 22.** Вычислить  $J = \iint_S z^2 dS$  по полной поверхности конуса:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2.$$

**Решение.** Пусть  $S_1$  - боковая поверхность конуса, а  $S_2$  - его основание. По аддитивности поверхностного интеграла 1-го рода получаем

$$\iint_S z^2 dS = \iint_{S_1} z^2 dS_1 + \iint_{S_2} z^2 dS_2. \text{ К первому интегралу применим формулу}$$

для явного задания поверхности:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Поскольку же

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ то интеграл}$$

$$\iint_{S_1} z^2 dS_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dxdy = \iint_{D_1} (x^2 + y^2) \sqrt{2} dxdy =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 d\rho d\varphi = 8\sqrt{2}\pi.$$

Здесь  $D_1 = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$  и в двойном интеграле осуществлен переход к полярным координатам. На основании конуса  $z = 2$ . Поэтому  $\iint_{S_2} z^2 dS_2 =$

$$= \iint_{S_2} 4 dS_2 = 4\Delta S_2. \text{ Но } \Delta S_2 = 4\pi \cdot 2^2, \text{ так как основание конуса - круг радиуса}$$

равного 2. Окончательно  $J = 8\sqrt{2}\pi + 16\pi$ .