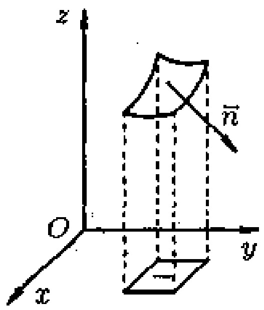
ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ II РОДА

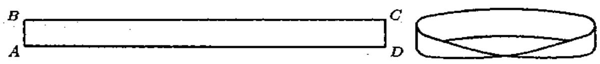
Основные понятия

Поверхностный интеграл II рода строится по образцу криволинейного интеграла II рода, где направленную кривую разлагали на элементы и проектировали их на координатные оси; знак брали в зависимости от того, совпадало ли ее направление с направлением оси или нет.

Пусть задана *двусторонняя поверхность* (таковой является плоскость, эллипсоид, любая поверхность, задаваемая уравнением

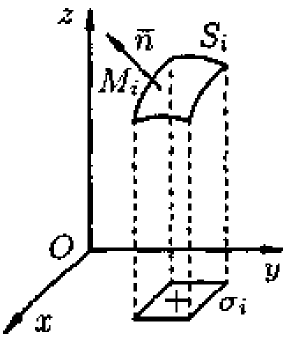


б



$$z = f\,(x;y),$$

где $f\,(x;y)$, f_x' и f_y' – функции, непрерывные в некоторой области D плоскости Oxy и т.д.). После обхода такой поверхности, не пересекая ее границы, направление нормали к ней не меняется.



a

Примером односторонней поверхности является так называемый лист Мебиуса, получающийся при склеивании сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ так, что точка A совмещается с точкой C, B – с D

Далее, пусть в точках рассматриваемой двусторонней поверхности S в пространстве $Oxyz$ определена непрерывная функция $f\,(x;y;z)$. Выбранную сторону поверхности (в таком случае говорят, что поверхность *ориентирована*) разбиваем на части S_i, где $i = 1,2,...,n$, и проектируем их на координатные плоскости. При этом площадь проекции $\Delta\sigma_i$ берем со знаком «плюс», если выбрана верхняя сторона поверхности, или, что то же самое, если нормаль $\vec{n}$ к выбранной стороне поверхности составляет с осью Oz острый угол, т. е. $\cos\gamma_i > 0$; со знаком «минус», если выбрана нижняя сторона поверхности (или $\cos\gamma_i < 0$). В этом случае интегральная сумма имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i \qquad (1)$$

где $\Delta\sigma_i = (S_i)_{Oxy}$ – площадь проекции S_i, на плоскость Oxy.

Предел интегральной суммы (1) при $\lambda = \max d_i \to 0$, если он существует и не зависит от способа разбиения поверхности S на части S_i и от выбора точек $M \in S_i$, называется *поверхностным интегралом II рода* (по координатам) от функции $f(x;y;z)$ по переменным x и y по выбранной стороне поверхности и обозначается

$$\iint_S f(x;y;z)dxdy$$

Итак,

$$\iint_S f(x;y;z)dxdy = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i .$$

Аналогично определяются поверхностные интегралы II рода по переменным yи z и z и x:

$$\iint_S f(x;y;z)dydz = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\cdot\left(S_i\right)_{Oyz} ,$$

$$\iint_S f(x;y;z)dxdz = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\cdot\left(S_i\right)_{Oxz} .$$

Общим видом поверхностного интеграла II рода служит интеграл

$$\iint_S P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdy$$

$$\left(= \iint_S Pdydz + \iint_S Qdzdx + \iint_S Rdxdy \right),$$

где P, Q, R – непрерывные функции, определенные в точках двусторонней поверхности S.

Отметим, что если S – замкнутая поверхность, то поверхностный интеграл по внешней стороне ее обозначается $\oiint\limits_S$, по внутренней $\oiint\limits_{-S}$.

Из определения поверхностного интеграла II рода вытекают следующие его свойства:

1. Поверхностный интеграл II рода изменяет знак при перемене стороны по-

верхности.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла.

3. Поверхностный интеграл от суммы функций равен сумме соответствующих интегралов от слагаемых.

4. Поверхностный интеграл II рода по всей поверхности $S = S_1 + S_2$ равен сумме интегралов по ее частям S_1 и S_2 (аддитивное свойство), если S_1 и S_2 пересекаются лишь по границе, их разделяющей.

5. Если S_1, S_2, S_3 – цилиндрические поверхности с образующими, параллельными соответственно осям Oz, Ox, Oy, то

$$\iint_{S_1} R(x;y;z)dxdy = \iint_{S_2} P(x;y;z)dydz = \iint_{S_3} Q(x;y;z)dxdz$$

Вычисление поверхностного интеграла II рода

Вычисление поверхностного интеграла II рода сводится к вычислению двойного интеграла.

Пусть функция $R(x;y;z)$ непрерывна во всех точках поверхности S, заданной уравнением $z = z(x;y)$, где $z(x;y)$ – непрерывная функция в замкнутой области D (или D_{xy}) – проекции поверхности S на плоскость Oxy.

Выберем ту сторону поверхности S, где нормаль к ней образует с осью Oz острый угол. Тогда $\Delta\sigma_i > 0$ ($i = 1,2,...,n$).

Так как $z_i = z(x_i;y_i)$, то интегральная сумма (1) может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} R(x_i;y_i;z(x_i;y_i))\Delta\sigma_i \qquad (2)$$

Правая часть этого равенства есть интегральная сумма для функции $R(x;y;z(x;y))$, непрерывной в области D. Переходя к пределу в равенстве (2) при $\lambda \to 0$, получаем формулу

$$\iint_{S} R(x;y;z)dxdy = \iint_{D} R(x;y;z(x;y))dxdy\,, \qquad (3)$$

выражающую поверхностный интеграл II рода по переменным x и y через двойной интеграл. Если выбрать вторую сторону, т.е. нижнюю, поверхности S, то полученный двойной интеграл берут со знаком «минус». Поэтому

$$\iint_{S} R(x;y;z)dxdy = \pm\iint_{D} R(x;y;z(x;y))dxdy \qquad (4)$$

Аналогично

$$\iint\limits_S Q(x;y;z)dxdz = \pm\iint\limits_{D_{xz}} Q(x;y(x;z);z)dxdz \tag{5}$$

$$\iint\limits_S P(x;y;z)dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} R(x(y;z);y;z)dydz \tag{6}$$

где D_{xz} и D_{yz} – проекции поверхности S на плоскости Oxz и Oyz соответственно (замкнутые области).

В формуле (5) поверхность S задана уравнением $y = y(x;z)$, а в формуле (6) – уравнением $x = x(y;z)$. Знаки перед интегралами выбираются в зависимости от ориентации поверхности S (так, в формуле (5) берем знак «плюс», если нормаль к поверхности образует с осью Oy острый угол, а знак «минус» – если тупой угол).

Для вычисления общего поверхностного интеграла II рода используют формулы (4)–(6), проектируя поверхность S на все три координатные плоскости:

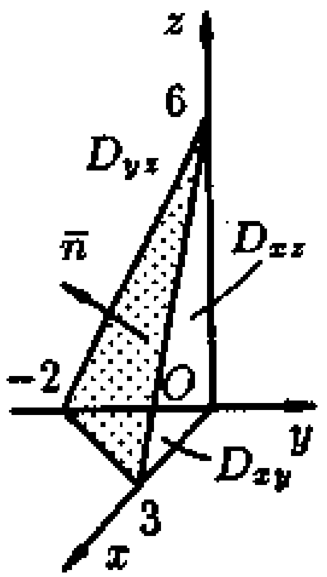
$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y;z);y;z)dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x;y(x;z);z)dxdz \pm$$
$$\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x;y;z(x;y))dxdy.$$

Замечание

Можно показать справедливость равенств

$$dxdy = \cos\gamma\cdot ds,\ dxdz = \cos\beta\cdot ds,\ dydz = \cos\alpha\cdot ds, \tag{7}$$

где ds – элемент площади поверхности S; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ к выбранной стороне поверхности S. Поверхностные интегралы I и II рода связаны соотношением



$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)ds \tag{8}$$

Пример

Вычислить $I_1 = \iint\limits_S -xdydz + zdzdx + 5dxdy$ по верхней стороне части плоскости

$2x - 3y + z = 6$, лежащей в IV октанте.

На рисунке изображена заданная часть плоскости. Нормаль $\vec{n}$, соответствующая указанной стороне поверхности, образует с осью Oy тупой угол, а с осями Ox и Oz – острые.

В этом можно убедиться, найдя направляющие косинусы нормального вектора $\vec{n}$ = (2;–3;1) плоскости:

$$|\vec{n}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}\,,\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} > 0\,,\ \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{14}} < 0\,,\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}} > 0\,.$$

Поэтому перед двойными интегралами в формулах (4) и (6) следует брать знак «плюс», а в формуле (5) – знак «минус». Следовательно,

$$I_1 = +\iint\limits_{D_{yz}} \left(-3 - \frac{3}{2}y + \frac{z}{2}\right) dydz - \iint\limits_{D_{xz}} zdzdx + 5\iint\limits_{D_{xy}} dxdy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{3y+6} \left(-3 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z\right) dz - \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{6-2x} zdz + 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = -9.$$

Формула Остроградского-Гаусса

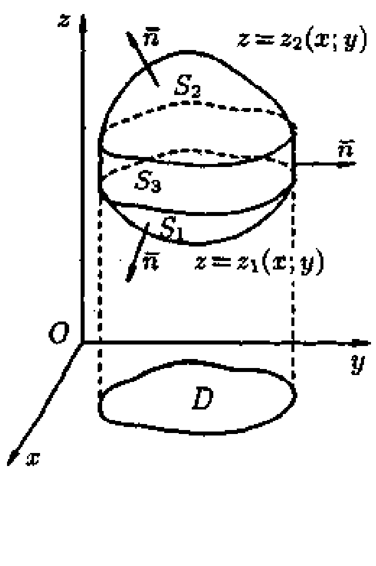
Связь между поверхностном интегралом II рода по замкнутой поверхности и тройным интегралом по объему, ограниченному этой поверхностью устанавливает следующая теорема.

Теорема Если функции $P(x;y;z)$. $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в пространственной области V, то имеет место формула

$$\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint\limits_{S} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy\,, \qquad (9)$$

где S – граница области V и интегрирование по S производится по ее внешней стороне.

Формула (9) называется формулой Остроградского-Гаусса (является аналогом формулы Остроградского-Грина).



Доказательство

Пусть область V ограничена снизу поверхностью S_1, уравнение которой $z = z_1(x;y)$; сверху – поверхностью S_2, уравнение которой $z = z_2(x;y)$ (функции $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ непрерывны в замкнутой области D – проекции V на плоскость Oxy, $z_1(x;y) \le z_2(x;y)$); сбоку – цилиндрической поверхностью S_3, образующие которой параллельны оси Oz.

Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz = \iint\limits_D R(x;y;z_2(x;y))dxdy - \iint\limits_D R(x;y;z_2(x;y))dxdy.$$

Двойные интегралы в правой части равенства заменим поверхностными интегралами II рода по внешней стороне поверхностей S_1 и S_2 соответственно (см. (3)). Получаем:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{S_2} Rdxdy + \iint\limits_{S_1} Rdxdy$$

Добавляя равный нулю интеграл $\iint\limits_{S_3} Rdxdy$ по внешней стороне S_3 (см. свойство 5), получим:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{S_2} Rdxdy + \iint\limits_{S_1} Rdxdy + \iint\limits_{S_3} Rdxdy\,,$$

или

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \oiint\limits_S R(x;y;z)dxdy \qquad (10)$$

где S – поверхность, ограничивающая область V. Аналогично доказываются формулы

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \oiint\limits_S Q(x;y;z)dxdz\,, \qquad (11)$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \oiint\limits_S P(x;y;z)dydz\,, \qquad (12)$$

Складывая почленно равенства (10), (11) и (12), получаем формулу (9) Остроградского-Гаусса.

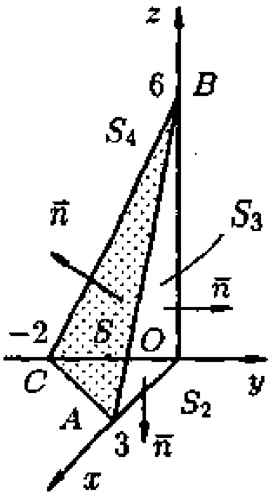
Замечания

1. Формула (4.9) остается справедливой для любой области V, которую можно разбить на конечное число областей рассмотренного вида.

2. Формулу Остроградского-Гаусса можно использовать для вычисления поверхностных интегралов II рода по замкнутым поверхностям.

Пример

Вычислить



$$I=\iint\limits_{+S}-xdydz+zdzdx+5dxdy,$$

где S – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $2x-3y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

По формуле (9) находим:

$$I=\iiint\limits_V(-1+0+0)dxdydz=-\iiint\limits_V dv=-\frac{1}{3}\cdot3\cdot6=-6.$$

Заметим, что интеграл I_1 можно вычислить иначе:

$$I_1=I-\iint\limits_{S_2}-\iint\limits_{S_3}-\iint\limits_{S_4},$$

где поверхности S_2, S_3, S_4 есть соответственно треугольники OAC, AOB, COB. Имеем:

$$I_1=-6+\iint\limits_{(OAC)}5dxdy-\iint\limits_{(AOB)}zdzdx+\iint\limits_{(COB)}(-0)dydz=$$

$$=-6+5\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot3-\int\limits_0^3dx\int\limits_0^{6-2x}zdz=+9-\frac{1}{2}\int\limits_0^3(6-2x)^2dx=9-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(6-2x)^3}{3}\Big|_0^3=-9.$$

Формула Стокса

Связь между поверхностными и криволинейными интегралами II рода устанавливает следующая теорема.

Теорема

Если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$ и $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках ориентированной поверхности S, то имеет место формула

$$\iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz=\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz,\qquad(13)$$

где L – граница поверхности S и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (т.е. при обходе границы L поверхность S должна оставаться все время слева).

Формула (13) называется формулой Стокса (Д.Г. Стокс – английский математик, физик).

Доказательство опустим.

Отметим, что формулу Стокса (13) можно применить и для поверхностей более сложного вида (разбив ее на части рассмотренного выше типа).

Формулу Стокса можно применять для вычисления криволинейного интеграла по замкнутому контуру с помощью поверхностного интеграла.

Из формулы Стокса вытекает, что если выполняются условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

то криволинейный интеграл по произвольному пространственному замкнутому контуру L равен нулю: $\oint\limits_{L} Pdx+Qdy+Rdz=0$.

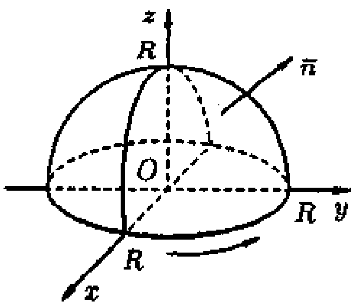
Следовательно, в данном случае криволинейный интеграл не зависит от вида пути интегрирования.

Пример

Вычислить $I=\oint\limits_{L} x^2y^3dx+dy+zdz$, где контур L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$; $z = 0$:

а) непосредственно;

б) используя формулу Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу $z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.



Поверхность интегрирования изображена на рисунке.

а) Запишем уравнение окружности в параметрической форме:

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = 0,\quad t \in [0;2\pi].$$

Имеем:

$$I=\int\limits_0^{2\pi} R^2\cos^2 t\cdot R^3\sin^3 t(-R\sin t)dt+\int\limits_0^{2\pi} R\cos t dt=$$

$$=-R^6\int\limits_0^{2\pi}\sin^4 t\cos^2 t dt+0=-R^6\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2\frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right)dt=$$

$$=-\frac{R^6}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t dt+\frac{R^6}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\cos 2t dt=-\frac{R^6}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt+0=-\frac{R^6}{16}2\pi=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

б) По формуле Стокса (13) находим:

$$I=\iint\limits_S(0-0)dydz+(0-0)dxdz+(0-3x^2y^2)dxdy=-3\iint\limits_S x^2y^2dxdy=-3\iint\limits_D x^2y^2dxdy .$$

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$I=-3\iint_D r^5\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,drd\varphi=-3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^R r^5dr=$$

$$=-\frac{3}{6}R^6\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cdot\sin^2 2\varphi d\varphi=-\frac{1}{8}R^2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi=-\frac{R^6}{16}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}+0=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

Некоторые приложения поверхностного интеграла II рода

С помощью поверхностного интеграла II рода можно найти объем тела, ограниченного сверху поверхностью S_2 ($z = z_2(x;y)$), снизу – поверхностью S_1 ($z = z_1(x;y)$), сбоку – цилиндрической поверхностью S_3, образующие которой параллельны оси Oz:

$$V=\frac{1}{3}\oiint_S xdydz+ydzdx+zdxdy, \qquad (14)$$

где $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Действительно, положив в формуле Остроградского-Гаусса (9) $P = x$, $Q = 0$, $R = 0$, находим: $\oiint_S xdydz=\iiint_V dxdydz$, т.е.

$$V=\oiint_S xdydz\,. \qquad (15)$$

Аналогично, полагая $P = 0$, $Q = y$, $R = 0$, находим еще одну формулу для нахождения объема тела с помощью поверхностного интеграла II рода:

$$V=\oiint_S ydxdz\,. \qquad (16)$$

Наконец, положив $P =0$, $Q = 0$, $R = z$, по формуле (9) находим

$$V=\oiint_S zdxdy\,. \qquad (17)$$

выражающую объем тела через поверхностный интеграл II рода.

Сложив почленно равенства (15)–(17) и разделив на три, получим формулу (14). Другие применения поверхностного интеграла II рода рассмотрим при изучении темы «Элементы теории поля».