

ВАРИАНТ 01

Задача 1. Найти производные следующих функций:

1. $y = \frac{x^3}{3} - \sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x^2}} - \frac{1}{x^2} + \ln x$
2. $y = \arcsin 3x \cdot \ln(2-x)$
3. $y = \frac{\cos(3x)}{3^{x-5}}$
4. $y = \sin(\ln 2x - x^3)$

Задача 2. Тело массой 5 кг движется по закону $s(t) = 1 - t + t^2$ (м). Найти кинетическую энергию тела через 10 с от начала движения, импульс и силу, действующую на тело в этот момент.

Задача 3. Число 8 разбить на два слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{\sin x} - 1}{\sin 2x}$

ВАРИАНТ 02

Задача 1. Найти производные следующих функций:

1. $y = 3x^6 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^5} + \operatorname{tg} x$
2. $y = (x^2 - 3) \ln(2 + x^2)$
3. $y = \frac{\cos(3x)}{(1 - x^2)}$
4. $y = \sqrt{(\ln 2x - x^4)}$

Задача 2. Смещение в ответ на одиночное мышечное сокращение (единичный импульс) описывается уравнением

$$y(t) = t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, t > 0. \text{ Определить скорость и ускорение.}$$

Задача 3. Разложить число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{\sqrt[3]{x-7} + 2}$

ВАРИАНТ 03

Задача 1. Найти производные следующих функций:

1. $y = \frac{x^4}{8} - 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{7}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2} + \arccos x$

2. $y = \arcsin(3+x) \cdot \ln x$

3. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{2^{x^2-5}}$

4. $y = \sin(\sqrt{x-3})$

Задача 2. Рост численности бактерий подчиняется закону $N(t) = 1000 \cdot \frac{e^t}{1 + 0,1(e^t - 1)}$.

Определить начальную численность бактерий и скорость роста числа бактерий.

Задача 3. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопитала: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x - 6x}{x^3}$

ВАРИАНТ 04

Задача 1. Найти производные следующих функций:

1. $y = \frac{x^8}{4} - 8\sqrt[4]{x^3} + \frac{7}{\sqrt{x^4}} - \frac{4}{x^2} - 2 \arcsin x$

2. $y = \operatorname{arctg}(3+x) \cdot \ln x + 3$

3. $y = \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 2)}{2^x}$

4. $y = \operatorname{tg}^3(x+2)$

Задача 2. Тело массой 3 кг движется по закону $s(t) = 1 + t + t^2$ (м). Найти импульс тела, кинетическую энергию тела и силу, действующую на тело через 5 с от начала движения.

Задача 3. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м³ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопитала: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{\frac{x}{2}} - 2 - x}{x^2}$

ВАРИАНТ 05

Задача 1. Найти производные следующих функций:

$$1. \quad y = -\frac{x^7}{14} + 8\sqrt[4]{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^6} + \operatorname{arcctg} x$$

$$2. \quad y = \arccos(3 - x^2) \cdot 3^x$$

$$3. \quad y = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(2 - x^3)}$$

$$4. \quad y = \sin^4(x^2 - 3x)$$

Задача 2. Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 + t - 17$ (м).

Найти кинетическую энергию тела в конце третьей секунды и силу, действующую на тело.

Задача 3. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в

$$\text{эллипс } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$

ВАРИАНТ 06

Задача 1. Найти производные следующих функций:

$$1. \quad y = \frac{x^4}{2} + 2\sqrt[4]{x^3} - \frac{7}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^3} - 3\operatorname{tg} x$$

$$2. \quad y = \operatorname{tg}(3 + x) \cdot \cos x$$

$$3. \quad y = \frac{\arccos 3x}{\sqrt[7]{x}}$$

$$4. \quad y = \sin(\cos 3x)$$

Задача 2. Тело массой 5 кг движется по закону $s(t) = 1 - t + t^2$ (м). Найти

кинетическую энергию тела через 10 с от начала движения и силу, действующую на тело в этот момент.

Задача 3. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полукруг радиуса R.

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$

ВАРИАНТ 07

Задача 1. Найти производные следующих функций:

$$1. \quad y = -\frac{x^3}{3} + \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x^3}} - \frac{4}{x^4} - \frac{\arctgx}{3}$$

$$2. \quad y = \arctgx^2 \cdot 3^{x-2}$$

$$3. \quad y = \frac{\operatorname{ctg}(x^2 - 2)}{\ln x}$$

$$4. \quad y = \operatorname{arcctg}^2(x-2)$$

Задача 2. Электрический заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону:

$$q(t) = 3,05 + 6,11t - \frac{0,8}{t+1} \text{ (Кл). Найти закон изменения силы тока } i(t) \text{ и его величину в}$$

момент времени $t = 5\text{с}$.

Задача 3. Найти такое положительное число, чтобы разность между ним и его кубом была наибольшей

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctgx}{x^3}$

ВАРИАНТ 08

Задача 1. Найти производные следующих функций:

$$1. \quad y = -\frac{2x^3}{3} + 8\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x^4}} - \frac{1}{6x^6} + \frac{e^x}{2}$$

$$2. \quad y = \ln(3 - x^2) \cdot 3^x$$

$$3. \quad y = \frac{\operatorname{tgcx}}{(2-x)^2}$$

$$y = \operatorname{arcsin}^2(x-3)$$

Задача 2. Движение материальной точки массой $m=2\text{кг}$ в единицах СИ описывается уравнением $x(t) = 5 - 8t + 4t^2$. Найти импульс тела через 4 с от начала движения и силу, действующую на точку в этот момент времени.

Задача 3. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак вместимостью $V = 16\pi \approx 50\text{м}^3$. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctgx}$

ВАРИАНТ 09

Задача 1. Найти производные следующих функций:

$$1. \quad y = -2x^4 - \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^3} - 3 \sin x$$

$$2. \quad y = (x^2 - 3x) \cdot \ln(2 - x)$$

$$3. \quad y = \frac{(1 - x^3)^9}{x}$$

$$4. \quad y = (\arcsin x - x^4)^3$$

Задача 2. Заряд на пластинах конденсатора колебательного контура с течением времени изменяется по закону:

$q(t) = 10^{-6} \cdot \sin 10^4 \pi t$. Найти закон изменения силы тока $\left(i(t) = \frac{dq}{dt} \right)$ и его величину в начальный момент времени.

Задача 3. Найти положительное число, которое, будучи сложено с обратным ему числом, даёт наименьшую сумму.

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$$

ВАРИАНТ 10

Задача 1. Найти производные следующих функций:

$$1. \quad y = 3x^4 - \frac{\sqrt[5]{x^3}}{2} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^3} + 5 \operatorname{ctgx} x$$

$$2. \quad y = (x^2 - 3)^{10} \cdot \ln x$$

$$3. \quad y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x}} \quad 4. \quad y = \operatorname{tg}^3(2^x - x^2)$$

Задача 2. Концентрация некоторого вещества в крови человека при выведении его из организма изменяется по закону:

$c(t) = 2 \cdot e^{-0,05t}$. Найти скорость выведения вещества из организма с течением времени. Какой смысл имеет знак скорости?

Задача 3. В питательную среду вносят 1000 бактерий. Численность N бактерий возрастает согласно уравнению $N(t) = 1000 + \frac{1000t}{100 + t^2}$, где t – время, ч. Определить максимальное количество бактерий.

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \operatorname{ctgx} x - 1}{x^2}$

ВАРИАНТ 11

Задача 1. Найти производные следующих функций:

$$1. \quad y = \frac{x^4}{2} - \sqrt[6]{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{x^5} + 3 \ln x$$

$$2. \quad y = \arcsin x \cdot (2 - x^2)$$

$$3. \quad y = \frac{\cos(3 + x^2)}{3 \ln x}$$

$$4. \quad y = \cos^3(\ln 2x - x^3)$$

Задача 2. Конденсатор ёмкостью C и зарядом q_0 разряжается через резистор R по

закону: $q(t) = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$. Найти скорость изменения заряда конденсатора (или ток разрядки). Какова сила тока в момент времени $t=0$?

Задача 3. Зависимость между объёмом воды V и температурой t определяется уравнением $V(t) = 1 + 8,38 \cdot 10^{-6} (t - 4)^2$. При какой температуре объём воды будет наименьшим?

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$$

ВАРИАНТ 12

Задача 1. Найти производные следующих функций:

$$1. \quad y = -2x^3 - \sqrt[4]{x} + \frac{2}{\sqrt{x^4}} - \frac{1}{2x} + \cos x$$

$$2. \quad y = (x^2 - 3x) \sin(2 - x)$$

$$3. \quad y = \frac{\operatorname{tg}(1 - x^3)}{(1 - x)}$$

$$4. \quad y = (\sin 2x - x^4)^3$$

Задача 2. Температура тела изменяется по закону: $T(t) = t^2 + 3t + 2(^0C)$. С какой скоростью нагревается тело и чему будет равна его температура через 5 с?

Задача 3. Тело движется по закону $s(t) = 5 - 13t + 12t^2 - t^3 (m)$. Определить его максимальную скорость.

Задача 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$